

# Research of nonlinear parametrical oscillations of an electrostatic pendulum

Saranin V.

## Исследование нелинейных параметрических колебаний электростатического маятника Саранин В. А.

Саранин Владимир Александрович / Saranin Vladimir Aleksandrovich - доктор физико-математических наук,  
профессор,

кафедра физики и дидактики физики,

Глазовский государственный педагогический институт им. В. Г. Короленко, г. Глазов, Удмуртская Республика

**Аннотация:** численно исследована динамика бистабильного электростатического маятника при параметрическом воздействии. Показано, что в зависимости от амплитуды и частоты параметрического воздействия маятник может совершать регулярные параметрические колебания, квазипериодические колебания и хаотические колебания.

**Abstract:** dynamics bistable electrostatic pendulum at parametrical influence is numerically investigated. It is shown that depending on amplitude and frequency of parametrical influence the pendulum can make regular parametrical oscillations, quasi-periodic oscillations and chaotic oscillations.

**Ключевые слова:** бистабильный электростатический маятник, параметрические колебания, хаотические колебания.

**Keywords:** bistable electrostatic pendulum, parametrical oscillations, chaotic oscillations.

Впервые теоретическое и экспериментальное исследование бистабильного электростатического маятника, о котором речь пойдет ниже, было проведено в работе [1]. В [2] была показана возможность хаотических колебаний такого маятника. Более подробно хаотические колебания электростатического маятника при параметрическом воздействии исследованы в [3]. В настоящей работе на основе численного решения уравнения движения маятника приведены графики колебаний, фазовые траектории и спектры Фурье для разных типов параметрических колебаний (регулярных, квазипериодических и хаотических), большинство из которых не приводились в цитируемых работах.

Известно, что нелинейные, в частности, бистабильные осцилляторы (имеющие два локальных минимума потенциальной энергии) под влиянием внешнего периодического воздействия относятся к классу неавтономных систем, которые могут демонстрировать сложную динамику и переход к хаосу (см., например, [4-6] и приведенные там ссылки). Ниже приведен пример простой физической системы, в которой под влиянием внешнего периодического (параметрического) воздействия возможны сложные, в том числе хаотические режимы колебаний.

В работе [1] показано, что электростатический физический маятник, представляющий собой заряженный шарик на вращающемся стержне, расположенный вблизи проводящей заземленной пластины, является бистабильным осциллятором (рис. 1). В заземленной пластине формируется электрическое изображение заряда, которое притягивает шарик, в результате маятник может поворачиваться относительно оси вращения  $O$ .

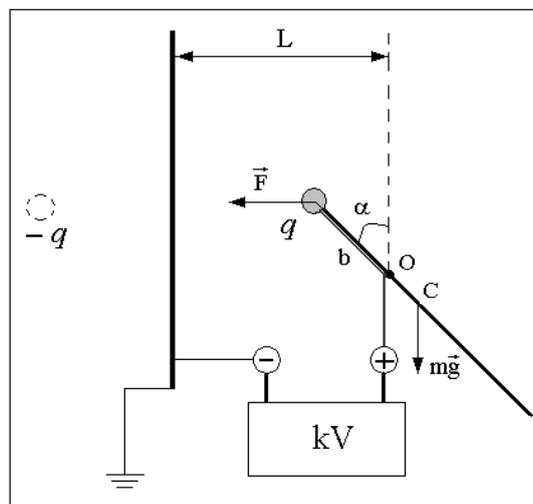


Рис. 1. Схема электростатического маятника. Заряженный шарик на вращающемся стержне около проводящей заземленной пластины

Потенциальную энергию маятника при его отклонении от первоначального вертикального положения (в нем потенциальная энергия считается равной нулю) можно записать в виде:

$$W(\alpha) = mgd \left[ (1 - \cos \alpha) + Q_0^2 \left( \frac{1}{L} - \frac{1}{L - \sin \alpha} \right) \right], \quad (1)$$

$$Q_0^2 = \frac{kq_0^2}{4mgdb}, \quad d = OC, \quad L = \frac{l}{b}.$$

$q_0$  – постоянный заряд на шарике, сообщаемый ему от высоковольтного источника напряжения,  $m$  – масса всей вращающейся системы,  $b$  – расстояние от оси вращения до центра шарика. Если энергию вычислять в единицах  $mgd$ , то она зависит от двух управляющих параметров  $L$  и  $Q_0^2$ . При варьировании этих параметров функция  $W(\alpha)$  может не иметь локальных экстремумов, может иметь по одному локальному максимуму и минимуму, может иметь два локальных минимума и один максимум, наконец, может иметь только один локальный минимум. Все эти случаи подробно рассмотрены в [1, 7].

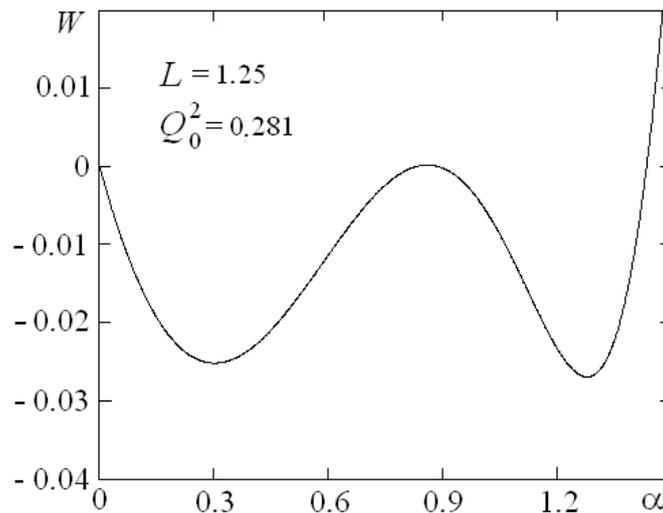


Рис. 2. Зависимость потенциальной энергии маятника от угловой координаты центра шарика

Здесь нас будет интересовать случай, соответствующий параметрам  $L = 1.25$  и  $Q_0^2 = 0.281$ . На рис. 2 показана зависимость  $W(\alpha)$  для этого случая. При таких значениях параметров в точке локального максимума величина потенциальной энергии близка к начальному значению, и это может способствовать развитию хаотических движений маятника при относительно слабых внешних воздействиях, если он начинает движение из начального положения, и трение мало.

Итак, рассмотрим динамику электростатического маятника без учета сил трения. Уравнение движения физического маятника:  $I\ddot{\alpha} = \sum_i M_i$ , где  $I$  – момент инерции маятника относительно оси

вращения,  $M_i$  – моменты внешних сил, действующих на него. В нашем случае можно записать

$$\sum_i M_i = Fb \cos \alpha - mgd \sin \alpha \quad (2)$$

Сила Кулона, действующая на шарик, равна

$$F = \frac{kq^2}{4(l - b \sin \alpha)^2} = \frac{kq^2}{4b^2 (L - \sin \alpha)^2}. \quad (3)$$

Путем модуляции напряжения, подаваемого на шарик, можно изменять заряд шарика, например, по закону

$$q(t) = q_0(1 + a \cos \omega_1 t) \quad (4)$$

Приведем уравнение движения маятника к безразмерному виду, поделив его на  $mgd$ , единицу измерения времени выберем так, чтобы коэффициент при  $\ddot{\alpha}$  был бы равен единице:  $[t] = \sqrt{l/(mgd)}$ . Тогда получим

$$\ddot{\alpha} + \sin \alpha - \frac{Q_0^2 \cos \alpha \cdot (1 + a \cos \Omega t)^2}{(L - \sin \alpha)^2} = 0 \quad (5)$$

$$\Omega = \omega_1 \sqrt{\frac{l}{mgd}}.$$

Численное интегрирование уравнения (5) с постоянными начальными условиями  $\alpha(0) = 0$ ,  $\dot{\alpha}(0) = \omega(0) = 0$  дает следующие результаты.

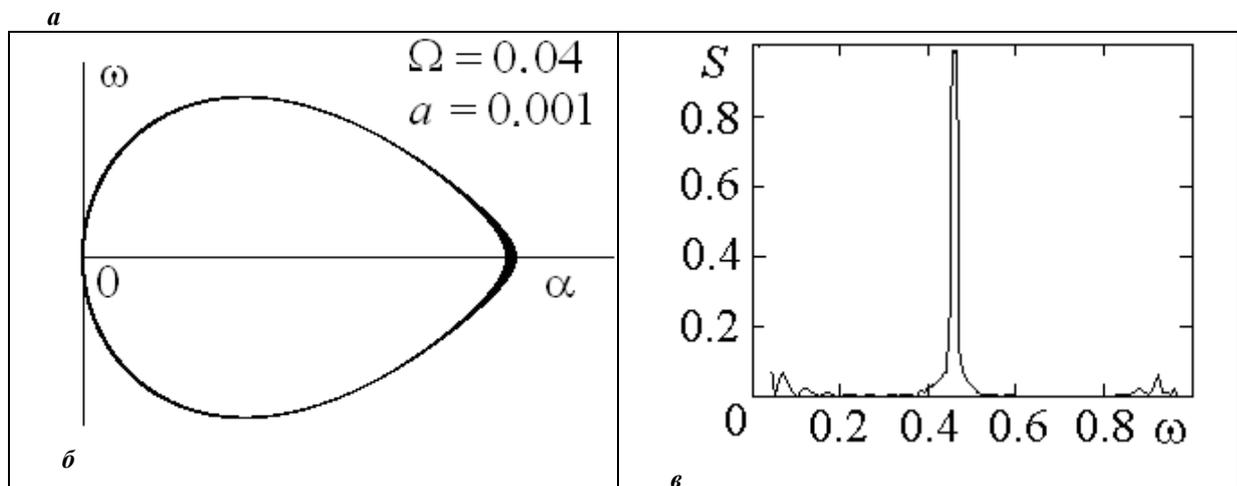
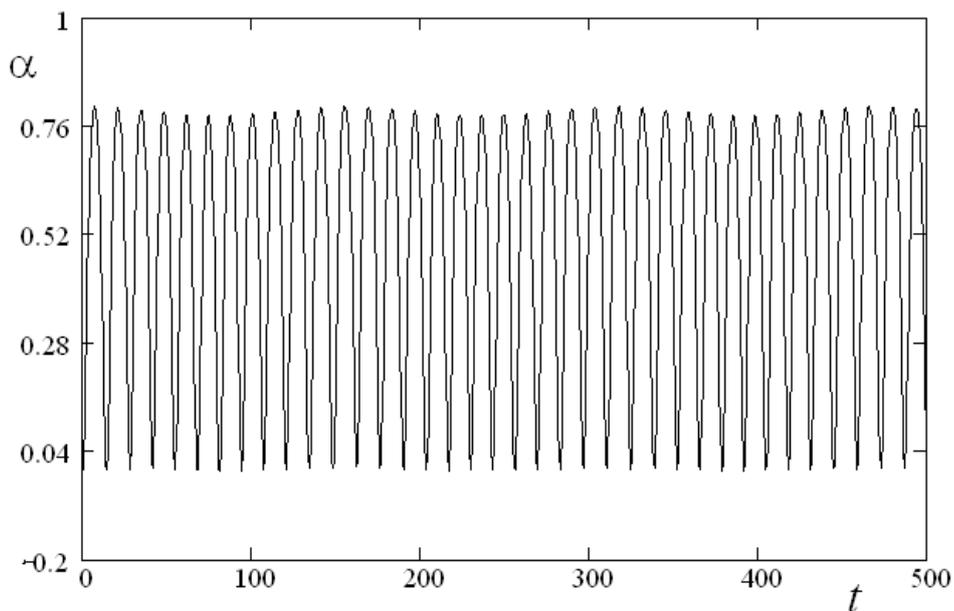


Рис. 3. Регулярные слабомодулированные по амплитуде колебания  $a = 0.001, \Omega = 0.04$

На рис. 3–7 представлены зависимости угловой координаты от времени (*a*), фазовые траектории (*б*) и Фурье спектры соответствующих колебаний (*в*). При этом спектральная функция рассчитывалась по формулам:

$$S(\omega) = \frac{1}{6 \cdot 10^3} (f_1^2(\omega) + f_2^2(\omega)), \quad f_1(\omega) = \int_0^{500} \alpha(t) \cos(\omega t) dt,$$

$$f_2(\omega) = \int_0^{500} \alpha(t) \sin(\omega t) dt.$$

Постоянный множитель выбирался для того, чтобы спектральная функция не слишком сильно отличалась от единицы. Всплески порядка и меньше 0,1 на графиках следует рассматривать как погрешности численных расчетов.

Из совокупности приведенных рисунков видно, что графикам, представленным на рис. 3-5, соответствуют регулярные амплитудно-модулированные колебания, графикам, представленным на рис. 6, соответствуют квазипериодические колебания (в спектре Фурье присутствуют три несоизмеримые частоты), графикам на рис. 7 – хаотические колебания (сложная фазовая траектория, сплошной спектр Фурье).

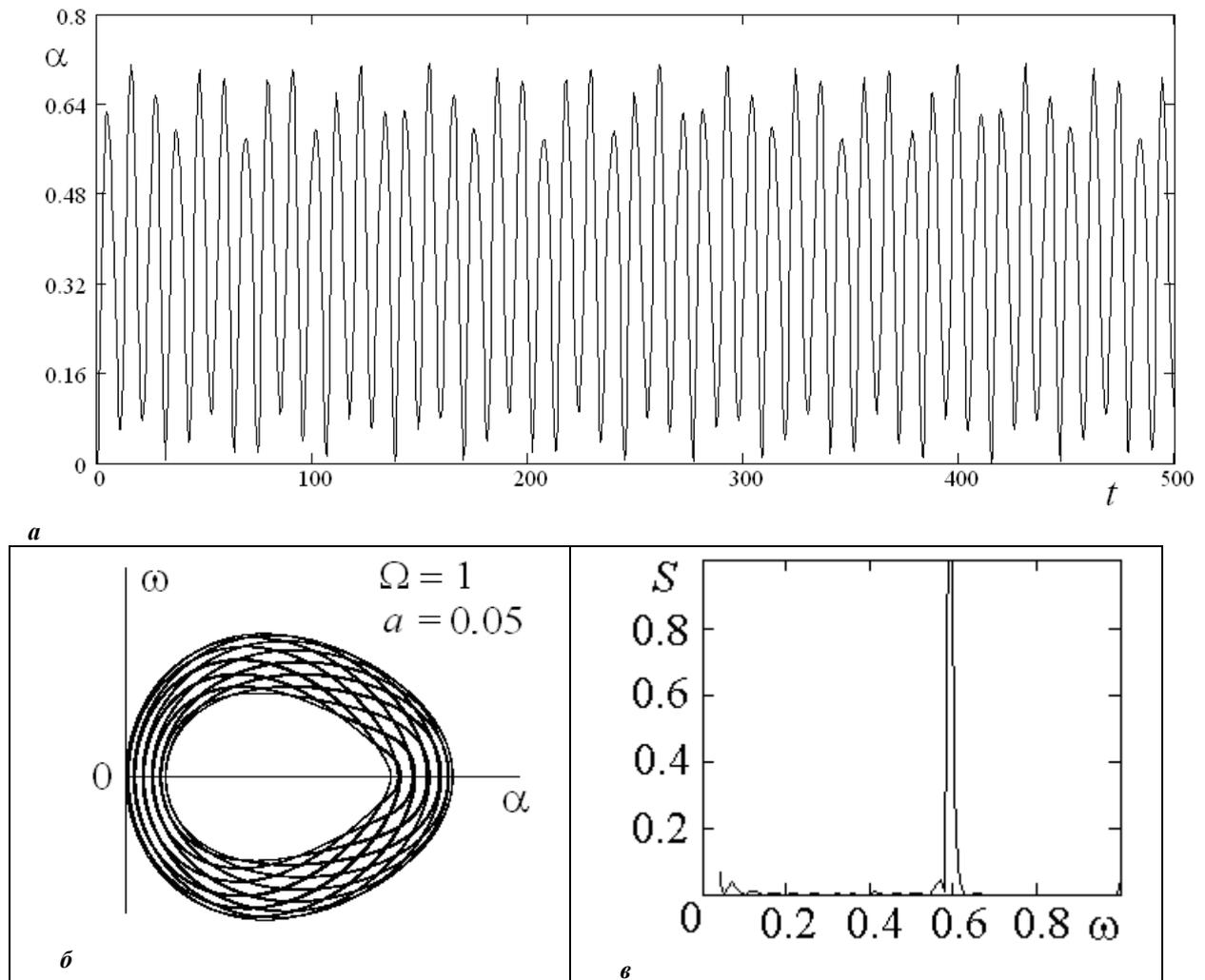


Рис. 4. Регулярные модулированные по амплитуде колебания  $a = 0.05, \Omega = 1$

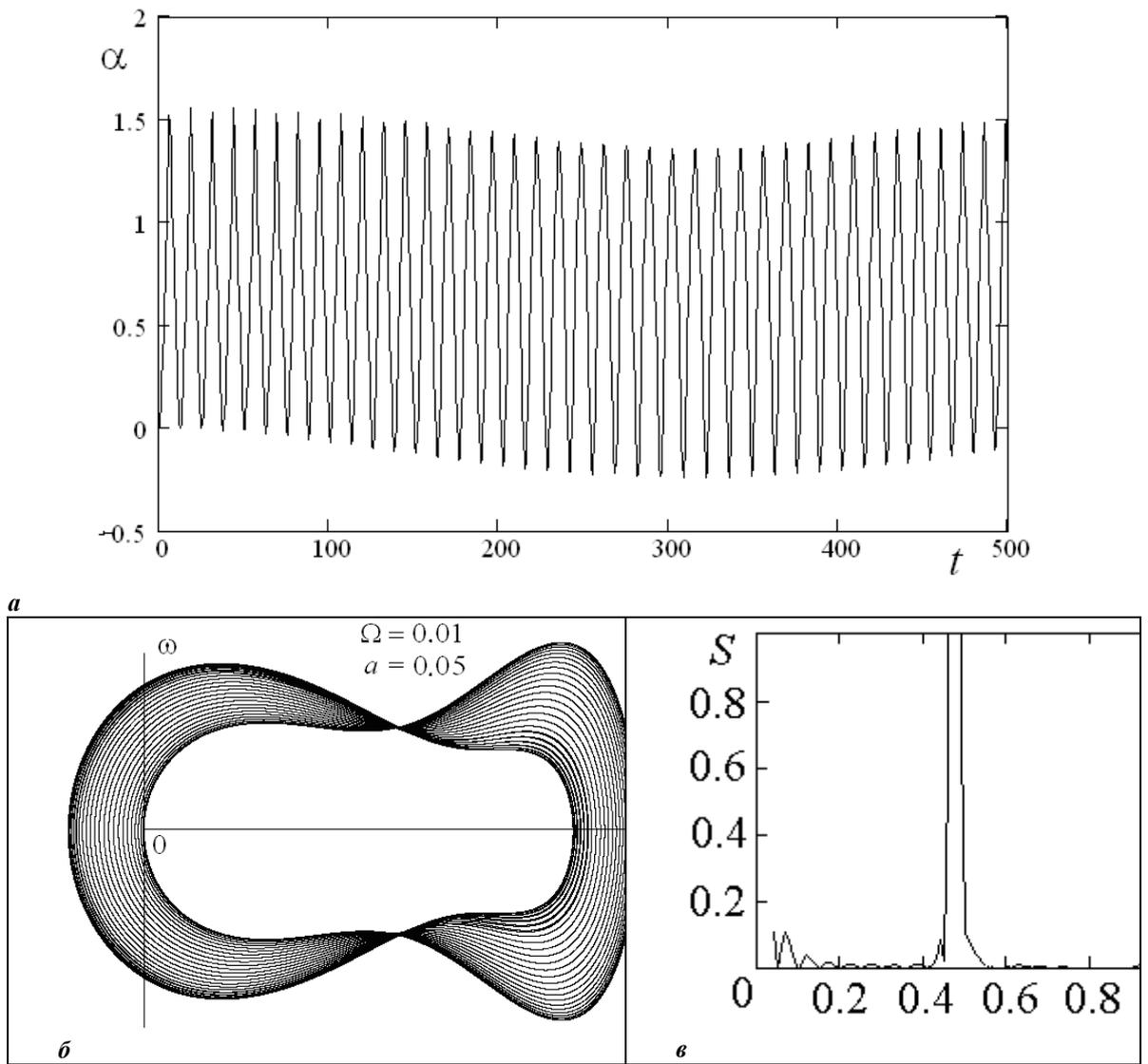
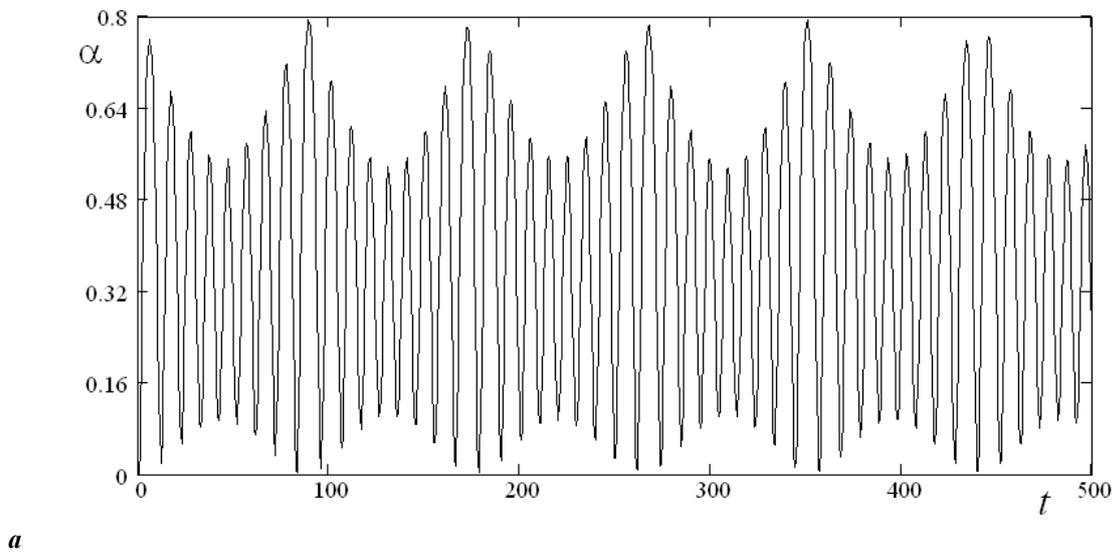


Рис. 5. Регулярные модулированные по амплитуде колебания  $a = 0.05, \Omega = 0.01$



*a*

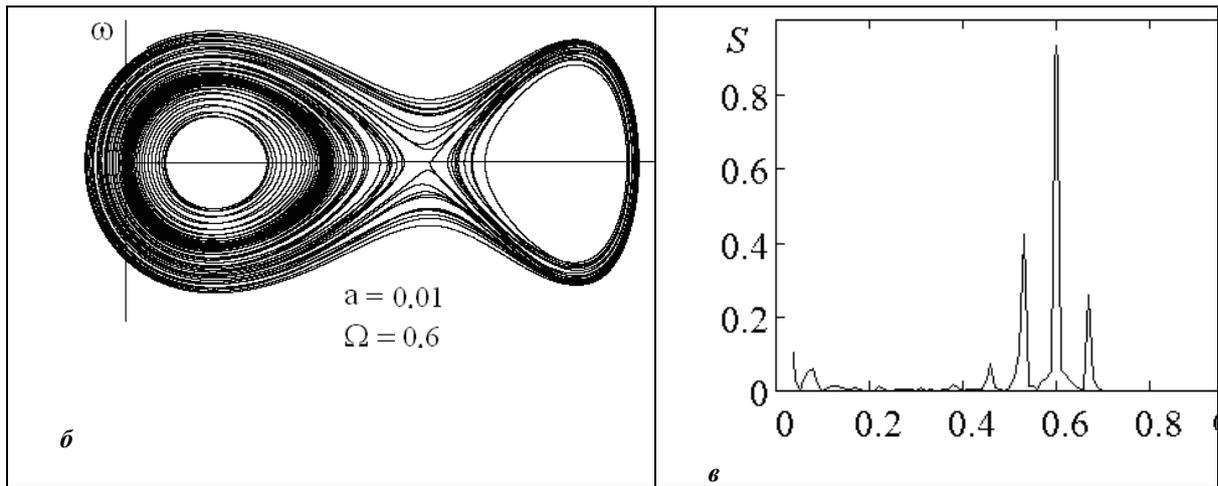


Рис. 6. Модулированные по амплитуде квазипериодические колебания (типа биений)  $a = 0.01, \Omega = 0.6$

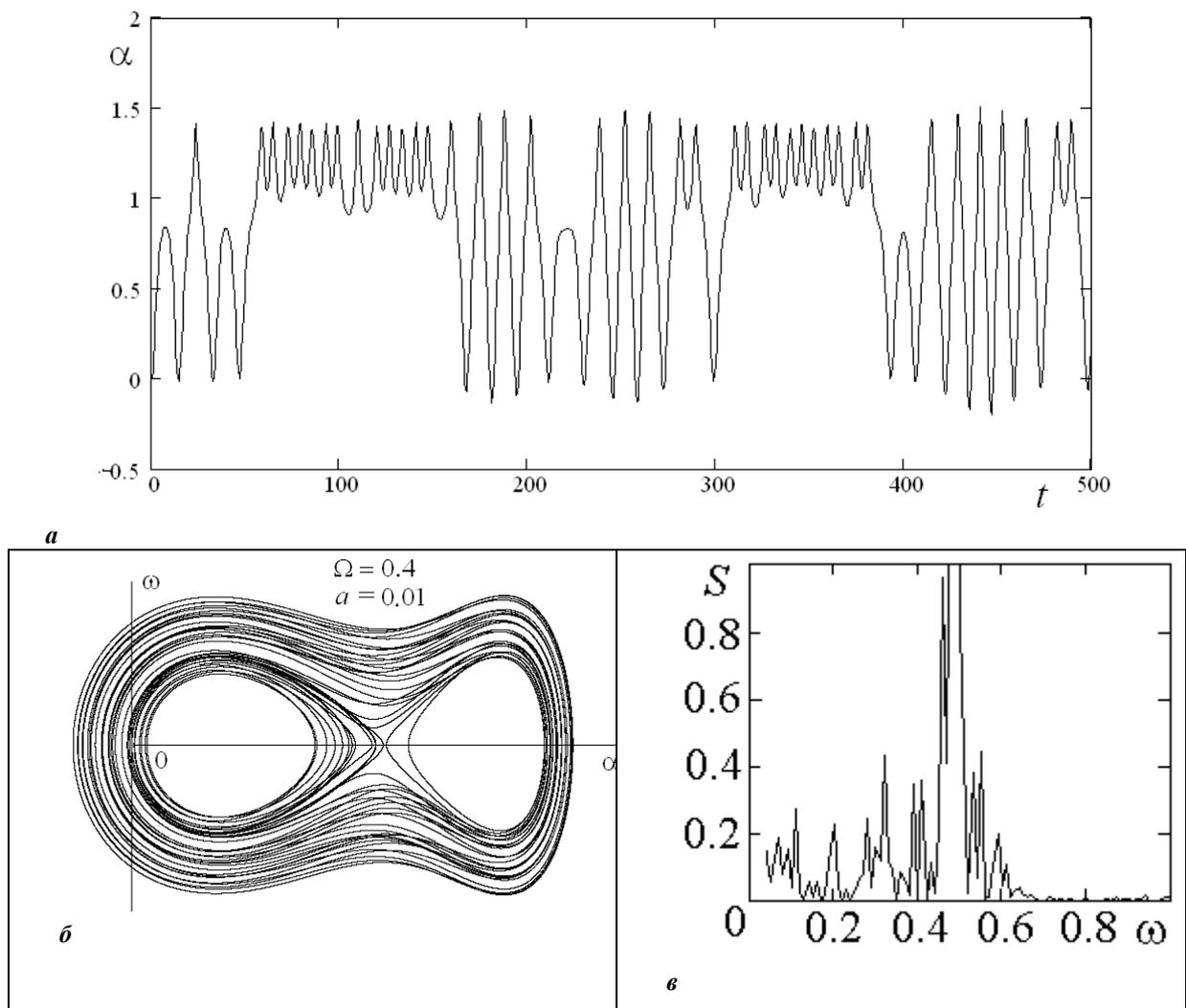


Рис.7. Хаотические колебания  $a = 0.01, \Omega = 0.4$

Таким образом, проведенное исследование показывает, что такая относительно простая физическая система – электростатический маятник при параметрическом воздействии может демонстрировать достаточно сложную (в том числе хаотическую) динамику.

### *Литература*

1. *Саранин В. А.* Электростатические осцилляторы // Успехи физических наук. – 2012. – Т. 182, № 7. – С. 749–758.
2. *Saranin V. A.* About behaviour of electrostatic pendulum near conducting or dielectric plates // Journal of Electrostatics. – 2014. – Vol. 72, N 4. – P. 235-241.
3. *Саранин В. А.* О хаотическом поведении электростатического маятника при параметрическом воздействии // Вестник Пермского университета. Серия: Физика. – 2014. – N 2-3 (27-28). – С. 18-24.
4. *Кузнецов С. П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2006. 296 с.
5. *Лоскутов А. Ю.* Динамический хаос. Системы классической механики // Успехи физических наук. – 2007. – Т. 177, № 9. – С. 989-1015.
6. *Мун Ф.* Хаотические колебания. – М.: Мир, 1990.
7. *Саранин В. А.* Метод электрических изображений в задачах и экспериментах: монография. – Москва - Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2012.