THE SECOND DEGREE DIOPHANTINE EQUATION OF THREE VARIABLES

Bokarev N.L.[1], Buyakova E.V.[2] (Republic Of Kazakhstan)
Email: Bokarev329@scientifictext.ru

[1]Bokarev Nikita Leonidovich - A pupil of grade 11;
[2]Buyakova Elena Valeryevna - Teacher of Mathematics,
SCHOOL № 6 OF THE AKIMAT,
SHAKHTINSK, REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

Abstract: *we call equations Diophantine if these equations or systems of equations have a number of unknowns greater than the number of equations. At the same time, we are faced with the task of finding solutions on the set of natural, entire, in rare cases, rational numbers. So far the problem of finding the general formula has been completely solved only for linear equations. The article is devoted to finding solutions of Diophantine equations of the second degree from three variables. We show a way of parametrization that allows us to write the general complete solution of some of them by a single formula without any restrictions on the used parameters.*
Keywords: *diophantine equation, the second degree equations between three variables.*

ДИОФАНТОВЫ УРАВНЕНИЯ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ ОТ ТРЁХ ПЕРЕМЕННЫХ

Бокарев Н.Л.[1], Буякова Е.В.[2] (Республика Казахстан)

[1]Бокарев Никита Леонидович - ученик 11 класса;
[2]Буякова Елена Валерьевна - учитель математики,
Коммунальное государственное учреждение Общеобразовательная школа № 6 Акимата,
г. Шахтинск, Республика Казахстан

Аннотация: *диофантовыми называются уравнения или системы уравнений, в которых количество неизвестных больше количества уравнений. При этом задача стоит отыскать решения на множестве натуральных, целых, в редких случаях, рациональных чисел. До сих пор задача нахождения общей формулы решена только для линейных уравнений. Статья посвящена нахождению решений некоторых диофантовых уравнений второй степени от трёх переменных, показан способ параметризации, позволяющий записать общее полное решение некоторых из них единой общей формулой без ограничений на используемые параметры.*
Ключевые слова: *диофантово уравнение, уравнения второй степени от трёх переменных.*

К диофантовым уравнениям приводят задачи, по смыслу которых неизвестные значения величин могут быть только целыми числами [1, 3]. Долгое время надеялись отыскать общий способ решения любого диофантова уравнения. Однако в 1970 г. ленинградский математик Ю.В. Матиясевич доказал, что такого общего способа быть не может [6]. Тем не менее, можно найти общие подходы к решению некоторых классов диофантовых уравнений [4, 5].

В одной из предыдущих статей мы рассматривали решение уравнения $x^2 + py^2 = z^2$, где $p, x, y, z \in \mathbb{N}$, p – простое число [2]. Была поставлена задача найти решения для более сложного уравнения

$$x^2 + ky^2 = z^2 \qquad (1)$$

где $k, x, y, z \in \mathbb{N}$, k – свободное от квадратов любое нечётное число.

Очевидно, что если $\langle x, y, z \rangle$ – решение уравнения (1), то и любая тройка $\langle lx, ly, lz \rangle$, где $l \in \mathbb{N}$, также является решением уравнения (1). Основными мы будем называть те тройки решений, для которых нет ни одного, отличного от единицы, натурального числа, делящего все три числа x, y, z без остатка. То есть такие, для которых $(x, y, z) = 1$.

Легко показать, что тогда также выполняются условия

$$(x, ky) = (z, ky) = (x, z) = 1. \qquad (2)$$

Действительно, положим, например, что $k|x$, то есть $x = kx_1$. Имеем, $k^2 x_1^2 + ky^2 = z^2$. Откуда следует, что $k|z$, то есть $z = kz_1$, тогда $kx_1^2 + y^2 = kz_1^2$, но тогда $k|y$, а значит $(x, y, z) = k \neq 1$, что противоречит условию $(x, y, z)=1$. Полученное противоречие доказывает необходимость условия $(x, ky) = 1$. Аналогично можно доказать, что $(z, ky) = (x, z) = 1$.

Для отыскания решений уравнения (1) будем рассматривать не само уравнение (1), а равносильное ему уравнение

$$py^2 = (z + x)(z - x), \qquad (3)$$

Из уравнения (3) следует, что $k|(z + x)(z - x)$; с учётом этого произведём замену $z + x = a \cdot \prod_{i=1}^{l} k_i$, $\quad z - x = b \cdot \prod_{i=l+1}^{r} k_i$, $\qquad (4)$

где $i = \overline{1,r}$; l, r, $a, b \in \mathbb{N}$; откуда

$$z = \frac{a \cdot \prod_{i=1}^{l} k_i + b \cdot \prod_{i=l+1}^{r} k_i}{2},$$
$$x = \frac{a \cdot \prod_{i=1}^{l} k_i - b \cdot \prod_{i=l+1}^{r} k_i}{2}. \qquad (5)$$

Если допустить, что (a, $в$) = d, то есть, $a = da_1$, $b = db_1$, то выражение (5) примет вид
$$z = d\frac{a_1 \cdot \prod_{i=1}^{l} k_i + b_1 \cdot \prod_{i=l+1}^{r} k_i}{2},$$
$$x = d\frac{a_1 \cdot \prod_{i=1}^{l} k_i - b_1 \cdot \prod_{i=l+1}^{r} k_i}{2}. \qquad (6)$$

где $i = \overline{1,r}$; $a_1, b_1 \in \mathbb{N}$, $(a_1, b_1) = 1$. Согласно условию (2), в зависимости от чётности чисел a_1 и b_1, d может принимать только два значения.

1) Если a_1 и b_1 – нечётны, то $d = 1$, тогда, согласно уравнению (3) $y^2 = ab$,

но, так как, $(a_1, b_1) = 1$, в данном случае, то числа a и b должны быть квадратами. Поскольку оба числа нечётны, то положим
$$a = m^2, \quad b = n^2, \qquad (7)$$

где m, $n \in \mathbb{N}$, $(m, n) = 1$, m и n – нечётны. На основании выражений (3) – (7) формула
$$x = \frac{m^2 \cdot \prod_{i=1}^{s} k_i - n^2 \cdot \prod_{i=s+1}^{r} k_i}{2},$$
$$y = mn, \qquad (8)$$
$$z = \frac{m^2 \cdot \prod_{i=1}^{s} k_i + n^2 \cdot \prod_{i=s+1}^{r} k_i}{2},$$

где $i = \overline{1,r}$; $k_i, x, y, z \in \mathbb{N}$, $(m, n) = 1$, $m^2 \prod_{i=1}^{s} k_i > n^2 \prod_{i=s+1}^{r} k_i$, m и n – нечётны, является общей формулой основных решений уравнения (1).

2) Если a_1 и b_1 – разной чётности, то $d = 2$ и на основании выражений (4) – (7) по аналогии со случаем 1) находим формулу
$$x = m^2 \cdot \prod_{i=1}^{s} k_i - n^2 \cdot \prod_{i=s+1}^{r} k_i, \ y = 2mn, \ z = m^2 \cdot \prod_{i=1}^{s} k_i + n^2 \cdot \prod_{i=s+1}^{r} k_i, \qquad (9)$$

где $i = \overline{1,r}$; $m, n, k_i \in \mathbb{N}$, $(m, n) = 1$, $m^2 \prod_{i=1}^{s} k_i > n^2 \prod_{i=s+1}^{r} k_i$, m и n – разной чётности, является общей формулой основных решений уравнения (1).

Запишем решение уравнения в виде (1) в виде
$$x = \frac{m^2 \cdot \prod_{i=1}^{s} k_i - n^2 \cdot \prod_{i=s+1}^{r} k_i}{(2, m+n)},$$
$$y = \frac{2mn}{(2,m+n)}, \qquad (10)$$
$$z = \frac{m^2 \cdot \prod_{i=1}^{s} k_i + n^2 \cdot \prod_{i=s+1}^{r} k_i}{(2, m+n)},$$

где $i = \overline{1,r}$; m, n, $k_i \in \mathbb{N}$, $(m, n) = 1$, $m^2 \prod_{i=1}^{s} k_i > n^2 \prod_{i=s+1}^{r} k_i$. Очевидно, что если m и n – нечётны, то $(2, m + n) = 2$, и из формулы (10) следует формула (8), если же m и n – разной чётности, то $(2, m + n) = 1$ и из формулы (10) следует формула (9). Таким образом, формула (10) является общей формулой всех основных решений уравнения (1).

Теперь нетрудно написать и общую формулу решений уравнения (11):
$$x = h\frac{m^2 \cdot \prod_{i=1}^{s} k_i - n^2 \cdot \prod_{i=s+1}^{r} k_i}{(2, m+n)},$$
$$y = \frac{2mn}{(2,m+n)}, \qquad (11)$$
$$z = h\frac{m^2 \cdot \prod_{i=1}^{s} k_i + n^2 \cdot \prod_{i=s+1}^{r} k_i}{(2, m+n)},$$

где m, n, h, $k_i \in \mathbb{N}$ $(i = \overline{1,r})$, $(m, n) = 1$, $m^2 \prod_{i=1}^{s} k_i > n^2 \prod_{i=s+1}^{r} k_i$, k – свободное от квадратов нечётное число. При $h = 1$ из формулы (11) получается формула (10). Полагая в формуле (10) числа – конкретными натуральными числами получаем частные решения уравнения (1). Например, полагая $m = 1$, $n = 1$, $k = 15$, получим ‹1, 1, 4›; $m = 2$, $n = 5$, $k = 57$: ‹1, 20, 151› и так далее.

Если мы хотим получить общую формулу решений и для чётных k, то знаменатель формулы (11) несколько изменится:
$$x = h\frac{m^2 \cdot \prod_{i=1}^{s} k_i - n^2 \cdot \prod_{i=s+1}^{r} k_i}{(2, m^2 \cdot \prod_{i=1}^{s} k_i + n^2 \cdot \prod_{i=s+1}^{r} k_i)},$$
$$y = h\frac{2mn}{(2, m^2 \cdot \prod_{i=1}^{s} k_i + n^2 \cdot \prod_{i=s+1}^{r} k_i)}, \qquad (11')$$
$$z = h\frac{m^2 \cdot \prod_{i=1}^{s} k_i + n^2 \cdot \prod_{i=s+1}^{r} k_i}{(2, m^2 \cdot \prod_{i=1}^{s} k_i + n^2 \cdot \prod_{i=s+1}^{r} k_i)},$$

где $m, n, h, k_i \in \mathbb{N}$ $(i = \overline{1,r})$, $(m, n) = 1$, $m^2 \prod_{i=1}^{s} k_i > n^2 \prod_{i=s+1}^{r} k_i$, k – свободное от квадратов число. При фиксированных параметрах получаем частные решения. Например, $m = 2$, $n = 1$, $k = 6$, получим ‹5, 4, 11›; $m = 7$, $n = 3$, $k = 10$: ‹53, 42, 143› и так далее.

Таблица 1. Некоторые частные решения

k	k_1	k_2	m	n	x	y	z	$x^2 + ky^2 = z^2$
1	1	1	2	1	3	4	5	$3^2 + 4^2 = 5^2$
3	3	1	1	1	1	1	2	$1^2 + 3\cdot 1^2 = 2^2$
3	1	3	2	1	1	4	7	$1^2 + 3\cdot 4^2 = 7^2$
3	3	1	3	2	23	12	31	$23^2 + 3\cdot 12^2 = 31^2$
5	1	5	1	1	2	1	3	$2^2 + 5\cdot 1^2 = 3^2$
5	1	5	2	1	1	4	9	$1^2 + 5\cdot 4^2 = 9^2$
6	6	1	1	1	5	2	7	$5^2 + 6\cdot 2^2 = 7^2$
6	2	3	2	1	5	4	11	$5^2 + 6\cdot 4^2 = 11^2$
6	3	2	3	2	19	12	35	$19^2 + 6\cdot 12^2 = 35^2$
⋮			⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Таким образом, в результате проведённого исследования были найдены общие формулы решения диофантова уравнения второй степени от трёх переменных. На основе полученных решений, можно сделать вывод, что найденные подходы могут быть использованы к нахождению общих решений близких диофантовых уравнений.

Список литературы / References

1. *Бухштаб А.А.* Теория чисел: учебное пособие для вузов. [Электронный ресурс] // Онлайн-библиотека: точные науки: официальный сайт. Режим доступа: http://edu-lib.net/matematika-2/dlya-studentov/buhshtab-a-a-teoriya-chisel/ (дата обращения: 15.05.17).
2. *Бокарев Н.Л* Некоторые классические диофантовы уравнения / Н.Л. Бокарев, Е.В. Буякова. [Электронный ресурс] // Научно-методический электронный журнал «Концепт». Режим доступа: https://e-koncept.ru/2014/64312.html/ (дата обращения: 22.05.17).
3. *Гельфанд А.О.* Решение уравнений в целых числах / А.О. Гельфанд. Москва: ИТКЛ, 1987. 78 с.
4. *Кожегельдинов С.Ш.* О задачах, связанных с пифагоровыми тройками // Межвузовская конференция, посвящённая 150–летию со дня рождения Абая. / С.Ш. Кожегельдинов. Семей: СГУ имени Шакарима, 1991. С. 132–133.
5. *Ферма П.* Исследования по теории чисел и диафантову анализу: пер. с лат. и фр. / Под ред. И.Г. Башмаковой, Москва: Наука, Гл. ред. Физ.-мат. Лит, 1992. 320 с.
6. Энциклопедический словарь юного математика для среднего и старшего школьного возраста./ сост. А.П. Савин. Москва: Педагогика, 1989. С. 280–282.