

MAXIMUM FLOW

Pazova B.I.¹, Losanova M.A.², Abdalyan T.G.³, Mollaeva A.T.⁴, Merzhueva L.T.⁵,
Velichko D.A.⁶ (Russian Federation) Email: Pazova347@scientifictext.ru

¹Pazova Bella Igorevna – Student,
DEPARTMENT TOURISM;

²Losanova Marianna Arsenovna – Master,
DEPARTMENT SOCIAL WORK,
INSTITUTE OF SOCIAL WORK, SERVICE AND TOURISM;

³Abdalyan Tatiana Gennadyevna – Student,
DEPARTMENT MATHEMATICS,
INSTITUTE OF PHYSICS AND MATHEMATICS

⁴Mollayeva Anina Timurovna – Student,
DEPARTMENT PEDAGOGICAL EDUCATION,
INSTITUTE OF PEDAGOGY, PSYCHOLOGY AND SPORTS EDUCATION
KABARDINO-BALKARIAN STATE UNIVERSITY,
NALCHIK;

⁵Merzhueva Elizaveta Tamerlanovna – Student,
DEPARTMENT RUSSIAN LANGUAGE AND LITERATURE, FACULTY OF PHILOLOGY,
INGUSH STATE UNIVERSITY, MAGAS;

⁶Velichko Demid Aleksandrovich – Student,
DEPARTMENT OPERATION OF TRANSPORT-TECHNOLOGICAL MACHINES AND COMPLEXES,
POLYTECHNIC INSTITUTE
NOVGOROD STATE UNIVERSITY NAMED AFTER YAROSLAV THE WISE, VELIKY NOVGOROD

Abstract: in networks with limited bandwidth capacity, where edges have well-defined bandwidths, the problem of determining the maximum possible flow from one vertex to another is important.

To save, consider as an example fig. 1. and suppose that the numbers assigned to the edges now mean not prices, but carrying capacities. Suppose we want to determine the maximum flow from vertex 1 to vertex 8 (in these calculations, vertices 9 and 10 can be neglected). To do this, we introduce into consideration the separating section, which is a set of network edges connecting one set of vertices, which includes vertex 1, but does not include vertex 8 with the others. In the language of set theory, we consider the set of V vertices, divided into additional sets X_1 and X_2 , such that 1 vertex 1 to vertex 8 (in these calculations, vertices 9 and 10 can be neglected).

Keywords: mathematics; network; transport.

МАКСИМАЛЬНЫЙ ПОТОК

Пазова Б.И.¹, Лосанова М.А.², Абдалян Т.Г.³, Моллаева А.Т.⁴, Мержуева Л.Т.⁵,
Величко Д.А.⁶ (Российская Федерация)

¹Пазова Белла Игоревна – студент,
кафедра туризма;

²Лосанова Марианна Арсеновна – магистр,
кафедра социальной работы,
Институт социальной работы, сервиса и туризма;

³Абдалян Татьяна Геннадьевна – студент,
кафедра математики,
Институт физики и математики;

⁴Моллаева Анина Тимуровна – студент,
кафедра педагогического образования,
Институт педагогики, психологии и физкультурно-спортивного образования
Кабардино-Балкарский государственный университет,
г. Нальчик;

⁵Мержуева Елизавета Тамерлановна – студент,
кафедра русского языка и литературы, филологический факультет,
Ингушский государственный университет, г. Магас;

⁶Величко Демид Александрович – студент,
кафедра эксплуатации транспортно-технологических машин и комплексов,
Политехнический институт
Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого, г. Великий Новгород

Аннотация: в сетях с ограниченной пропускной способностью, где ребра имеют вполне определенные пропускные способности, важной является задача об определении максимально возможного потока из одной вершины в другую.

Для экономии рассмотрим в качестве примера рис. 1 и предположим, что приписанные ребрам числа означают теперь не цены, а пропускные способности. Положим, мы хотим определить максимальный поток из вершины 1 в вершину 8 (в этих расчетах вершинами 9 и 10 можно пренебречь). Для этого введем в рассмотрение разделяющее сечение, которое представляет собой множество ребер сети, соединяющих одно множество вершин, которое включает вершину 1, но не включает вершину 8 с остальными. На языке теории множеств мы рассматриваем множество V вершин, разбитых на дополнительные множества X_1 и X_2 , такие, что 1 вершины 1 в вершину 8 (в этих расчетах вершинами 9 и 10 можно пренебречь).

Ключевые слова: математика, сети, транспорт.

В сетях с ограниченной пропускной способностью, где ребра имеют вполне определенные пропускные способности, важной является задача об определении максимально возможного потока из одной вершины в другую [1].

Для экономии рассмотрим в качестве примера рис. 1. и предположим, что приписанные ребрам числа означают теперь не цены, а пропускные способности. Положим, мы хотим определить максимальный поток из вершины 1 в вершину 8 (в этих расчетах вершинами 9 и 10 можно пренебречь). Для этого введем в рассмотрение разделяющее сечение, которое представляет собой множество ребер сети, соединяющих одно множество вершин, которое включает вершину 1, но не включает вершину 8 с остальными. На языке теории множеств мы рассматриваем множество V вершин, разбитых на дополнительные множества X_1 и X_2 , такие, что 1 вершины 1 в вершину 8 (в этих расчетах вершинами 9 и 10 можно пренебречь). [2] Для этого введем в рассмотрение разделяющее сечение, которое представляет собой множество ребер сети, соединяющих одно множество вершин, которое включает вершину 1, но не включает вершину 8 с остальными. На языке теории множеств мы рассматриваем множество V вершин, разбитых на дополнительные множества X и X , такие, что $1 \in X_1$, а $8 \in X_2$ (символ $\in$ означает «принадлежит» или «является членом»), тогда разделяющее сечение, обозначенное (X_1, X_2) , по определению, таково:

$$(X_1, X_2) = \{(i, j); (i, j) \in E, i \in X_1, j \in X_2\}.$$

Пропускная способность в сечении равна сумме пропускных способностей ребер. Следующие примеры должны прояснить это простое понятие:

Таблица 1. Пропускная способность ребер

X_1	X_2	Сечение	Пропускная способность
1	3, 4, 5, 6, 7, 8	(1, 3), (1, 4)	4
1, 3, 4	5, 6, 7, 8	(3, 5), (4, 6)	3
1, 3, 5, 7	4, 6, 8	(1, 4), (3, 4), (7, 8)	5
1, 3, 4, 5, 6, 7	8	(6, 8), (7, 8)	2

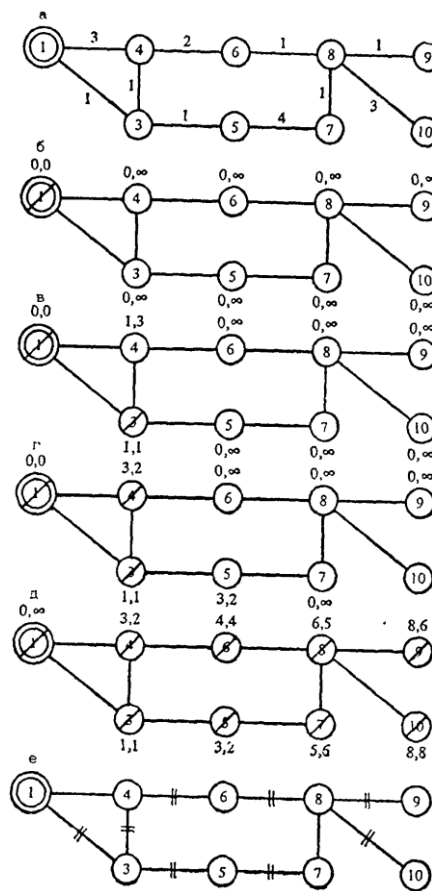


Рис. 1. Определение наиболее дешевых путей

Так как поток от вершины 1 к вершине 8 должен проходить через сечения, которые разделяют эти вершины, то максимальный поток не может превосходить пропускной способности любого такого сечения. Фактически теорема о *макси-потоке на мини-сечении* утверждает, что максимальный поток от одной вершины сети с ограниченной пропускной способностью к другой равен минимуму пропускных способностей сечений, разделяющих эти вершины. В данном примере максимальный поток от вершины 1 к вершине 8 равен двум единицам. [3]

Теорема о *макси-потоке на мини-сечении* служит примером так называемых минимаксных теорем, которые являются костяком теории сетевой оптимизации. Пока что-то минимизируется, другое в это время максимизируется. Эти теоремы кажутся обманчиво простыми, ибо их можно доказать с помощью более простой техники, нежели традиционные методы школьной математики. Вместо геометрии, тригонометрии, комплексных чисел, логарифмов, математического анализа здесь в основном требуются логические доводы, но понятийно это может оказаться весьма трудным. При конструктивном доказательстве теоремы о *макси-потоке на мини-сечении*, которое показывает, как добиться максимального потока в сети, пользуются теми же аргументами, которые приводились выше при объяснении алгоритма выбора самого дешевого пути [4].

Возможно, теорема о *макси-потоке на мини-сечении* станет более понятной, если мы рассмотрим следующий пример. Предположим, полиция хочет проверить все машины, которые направляются из вершины 1 в вершину 8, на дорожной сети, представленной на рис. 1. Она разумно предполагает следующее: во-первых, что автомобили движутся по маршрутам, которые проходят через какую-либо вершину не более чем один раз (на языке теории сетей это означает, что автомобили следуют по путям), и, во-вторых, что полиции надо проверить каждую машину, но только один раз. Возникает вопрос: где нужно разместить патрульные машины, чтобы блокировать дороги? Ответ: на любом множестве дорог, которые в совокупности образуют разделяющее сечение. Например, полиция может блокировать три дороги (1, 4), (1, 3) и (7, 8), определенно образующие сечение. Блокировка дорог (1, 4) и (7, 8), не составляющих сечения, была бы недостаточной, поскольку машины, следующие по пути 1, 3, 4, 6, 8, остались бы не проверенными. Посты на дорогах (1, 4), (3, 4), (6, 8) и (7, 8), опять-таки не являющихся

сечением, были бы неприемлемы, так как проверенные на дороге (1, 4) машины проверялись бы до вершины 8 еще раз [5].

Предположим теперь, что пропускная способность ребер соответствует той максимальной скорости (сотни машин в час), с которой полиция способна осуществлять проверку машин на дорогах. Например, пропускная способность в 3 единицы ребра (1, 4) означает, что на дороге (1, 4) полиция может проверить 300 машин в час.

Для каждого допустимого множества контрольных дорожных постов полиция может определить полную скорость проверки машин, просто складывая скорости для каждого поста. Если блокированы, например, дороги (1, 4), (3, 4) и (7, 8), то полная скорость (соответствующая пропускной способности сечения в 5 единиц), с которой может вестись проверка машин, составляет 500 автомобилей в час. Возникает вопрос: чему равен максимальный возможный поток (машин в час) от вершины 1 до вершины 8 и как нужно блокировать дороги, чтобы патрульные полицейские были полностью заняты? Ответ на него дает теорема о макси-потоке на мини-сечении. Максимальный поток составляет 200 машин в час и равен минимальной полной скорости, с которой полиция может вести эффективный дорожный контроль. Блокировать следует дорогу (6, 8) и одну из дорог (3, 5) или (7, 8), а транспорт направлять так, чтобы половина его проходила через вершину 6, а половина — через вершину 7. Тогда полиция не будет простаивать.

Простую интерпретацию теоремы о макси-потоке на мини-сечении представляет разделенный рекой город, а это бывает весьма часто. Если начало пути находится на одной, а пункт назначения — на другой стороне реки, то множество мостов и туннелей образует разделяющее сечение, которое обычно обладает минимальной пропускной способностью, равной максимально возможному потоку.

Другое приложение теорема находит в теории надежности сетей. При создании большой сложной системы важно обеспечить ее функционирование даже в том случае, если некоторые элементы выходят из строя вследствие поломки или старения. Один из критериев оценки надежности сети — число ребер, которые должны выйти из строя, чтобы разъединить сеть. Это можно определить, обращаясь к теореме о макси-потоке на мини-сечении. Каждому ребру приписывается единичная пропускная способность; тогда максимальный поток между двумя вершинами равен минимальному числу ребер, которые должны выйти из строя, чтобы все пути между этими двумя вершинами были разрушены. Типичной задачей здесь может быть конструирование сети, скажем, с 1000 вершин, такой, чтобы она не выходила из строя даже в том случае, если у нее отказали до четырех любых ребер. Для решения этой задачи на базе теоремы о макси-потоке на мини-сечении созданы эффективные алгоритмы.

Список литературы / References

1. *Афанасьев Л.Л. и др.* Единая транспортная система и автомобильные перевозки. М.: Транспорт, 1984. 465 с.
2. *Аникин Б.А., Тяпухин А.П.* Коммерческая логистика: Учеб. М.: ТК Велби, Изд-во Проспект, 2005. 432 с.
3. *Бауэрсокс Дональд Дж., Клосс Дейвид Дж.* Логистика: интегрированная цепь поставок. М: Олимп-Бизнес, 2001. 640 с.
4. *Безуглова М.А.* Транспортные услуги в международной торговле: Учебн. пособие. Мурманск: Изд-во МГТУ, 2001. 91 с.
5. *Беленький А.С.* Исследование операций в транспортных системах: идеи и схемы методов оптимизации планирования. М.: Мир, 1992. 582 с.