

## Study of the stability of a cylindrical vessel outside of elasticity

Sukhodoev S.<sup>1</sup>, Burov A.<sup>2</sup>, Koksharov P.<sup>3</sup>, Dudeski S.<sup>4</sup>

## Исследование устойчивости цилиндрического сосуда за пределами упругости

Суходоев С. С.<sup>1</sup>, Буров А. В.<sup>2</sup>, Кокшаров П. А.<sup>3</sup>, Дудецкий С. В.<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Суходоев Сергей Семенович / Sukhodoev Sergey Semenovich – эксперт,  
ООО «Авикур», г. Пермь;

<sup>2</sup>Буров Андрей Валерьевич / Burov Andrey Valerevich – директор;

<sup>3</sup>Кокшаров Петр Александрович / Koksharov Peter Aleksandrovich – заместитель директора по производству;

<sup>4</sup>Дудецкий Сергей Васильевич / Dudeski Sergey Vasilevich – инженер I категории,  
«РЦ ЭХО», г. Пермь

**Аннотация:** в статье анализируется проблема расчета напряженно-деформированного состояния цилиндрического сосуда, потеря устойчивости которого происходит в пластической зоне. Определение критической силы и перемещений осуществляется по касательному модулю упругости методом Энгессера-Шенли.

**Abstract:** the article analyzes the problem of calculating the stress-strain state of a cylindrical vessel, buckling is in the plastic zone. Determination of critical forces and displacements is carried out on the tangent modulus method Engesser-Shanley.

**Ключевые слова:** устойчивость, критическая сила, касательный модуль упругости, перемещения.

**Keywords:** stability, critical force, the tangent modulus of elasticity, displacement.

Расчет на устойчивость машиностроительных конструкций особенно актуален для длинных центрально сжатых стержней, а также тонкостенных оболочек, к которым относятся баки, сосуды высокого давления. Вопрос потери устойчивости в упругой области длинных и тонких стержней, гибкость которых велика, был подробно рассмотрен в работе [2]. Там для определения формы изогнутой оси стержня и перемещений после потери устойчивости в упругой зоне были использованы уравнения эластики Эйлера.

Для конструкций, потеря устойчивости которых происходит в пластической области, а это, как правило, стержни малой гибкости или цилиндрические оболочки, определение критической силы и перемещений осуществляется по касательному модулю упругости методом Энгессера-Шенли.

В работе на примере поведения стальных стержней трубчатого сечения, шарнирно закрепленных по концам, определяются усилия и перемещения от действия сжимающей силы. Для таких стержней потеря устойчивости происходит при напряжениях, превосходящих предел пропорциональности, т.е. в пластической области. В работе были рассмотрены два таких стержня, размеры которых приведены в таблице 1.

Таблица 1. Размеры стержней

Стержни	Внутренний радиус $r_{вн}$ , м	Наружный радиус $r_{н}$ , м	Длина $l$ , м	Гибкость, $\lambda$
3	0,0757	0,083	3,0	53
4	0,0961	0,1045	3,28	46

Проследим поведение стержня при возрастании сжимающей силы. Предположим, что достигнув критического значения  $P_0$  (по формуле Энгессера-Шенли сила  $P_0 = \frac{\pi^2 E_m I}{l^2}$ ), при некоторых малых возмущениях стержень изогнулся. Введем в рассмотрение изменение напряжения

$$\Delta\sigma = E_m \Delta\varepsilon, \quad (1)$$

где  $E_m = d\sigma / d\varepsilon$  - касательный модуль.

Так как сжимающая сила при потере устойчивости остается неизменной по предположению, то в одной части сечения будет  $\Delta\sigma > 0$ , в этом случае двигаемся по диаграмме вверх (рис. 1), в другой, где  $\Delta\sigma < 0$  происходит разгрузка, и зависимость между приращением напряжения и деформации изображается прямой, параллельной начальному, упругому участку диаграммы:

$$\Delta\sigma = E \cdot \Delta\varepsilon \quad (2)$$

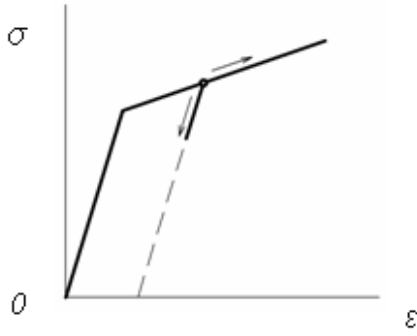


Рис. 1. Диаграмма сжатия

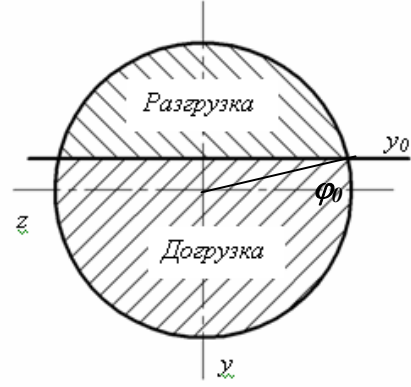


Рис. 2. Положение нейтральной оси

Так как сжимающая сила при потере устойчивости остается постоянной, то

$$\int_F \Delta \sigma dF = 0.$$

Ось  $y_0$  делит сечение на две части, в одной справедливо соотношение (1), в другой – соотношение (2), причем положение этой нейтральной оси заранее неизвестно (рис. 2).

Будем считать материал следующим диаграмме сжатия с линейным упрочнением, т.е. касательный модуль постоянный  $E_m = 0,5 \cdot 10^5$  МПа [1]. Обозначим  $\Delta \varepsilon$  – изменение оси стержня при изменении силы от  $P_0$  до  $P$ ,

$\chi$  – соответствующую кривизну изогнутой оси. Деформацию волокна с координатой  $y$  обозначим  $\Delta \varepsilon' = \Delta \varepsilon + \chi y$ .

На нейтральной оси она равна нулю, следовательно,  
 $y_0 = -\Delta \varepsilon / \chi$ .

Таким образом, уравнения (1) и (2) примут вид:

$$\begin{aligned} \Delta \sigma &= E_m (\Delta \varepsilon + \chi y), & y > y_0 \\ \Delta \sigma &= E (\Delta \varepsilon + \chi y), & y < y_0. \end{aligned}$$

Вычислим приращение силы и  $\Delta P = P - P_0$  изгибающий момент

$$\begin{aligned} \Delta P &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{r_{вн}}^{r_{н}} \Delta \sigma r d\varphi dr = E_m \int_{\varphi_0}^{\pi-\varphi_0} d\varphi \int_{r_{ен}}^{r_{н}} (\Delta \varepsilon + \chi y) r dr + E \int_{\varphi_0}^{\pi-\varphi_0} d\varphi \int_{r_{ен}}^{r_{н}} (\Delta \varepsilon + \chi y) r dr \\ M &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{r_{вн}}^{r_{н}} \Delta \sigma y r d\varphi dr = E_m \int_{\varphi_0}^{\pi-\varphi_0} d\varphi \int_{r_{ен}}^{r_{н}} (\Delta \varepsilon + \chi y) y r dr + E \int_{\varphi_0}^{\pi-\varphi_0} d\varphi \int_{r_{ен}}^{r_{н}} (\Delta \varepsilon + \chi y) y r dr, \end{aligned} \quad (3)$$

где можно выразить  $y = r \sin \varphi$ .

Определим поперечные перемещения сжатого стержня, если учтем, что момент в сечении с координатой  $x$  равен  $M = -Py(x)$ , а кривизна изогнутой оси

$$\chi = y''(x) = -\frac{1}{P} M''$$

Окончательно, дифференциальное уравнение примет вид

$$\frac{E_m I}{P} m'' + \tilde{\chi}(m) = 0,$$

а с учетом формулы Энгессера-Шенли

$$\frac{l^2 P_0}{\pi^2 P} m'' + \tilde{\chi}(m) = 0,$$

где  $m = \frac{M}{\Delta P \cdot r}$ ,  $\tilde{\chi} = \frac{E_m \pi d^2 \delta}{\Delta P} \chi$  - безразмерные величины, полученные из выражений (3).

В таблице 2 приведены значения критической силы, вычисленной по касательному модулю для двух стержней и значения вертикального перемещения конца стержня и максимальный прогиб при  $s=l/2$ . Так как критическая сила для стержней малой гибкости существенно больше, чем у гибких стержней, то и перемещения, особенно продольные, также больше, а вот поперечные перемещения отличаются незначительно.

Таблица 2  
Результаты расчетов

	$P_0$ , МН	$X_{max}$ , мм	$Y_{max}$ , мм
1	0,63	10	39,1
2	1,22	15	40,2

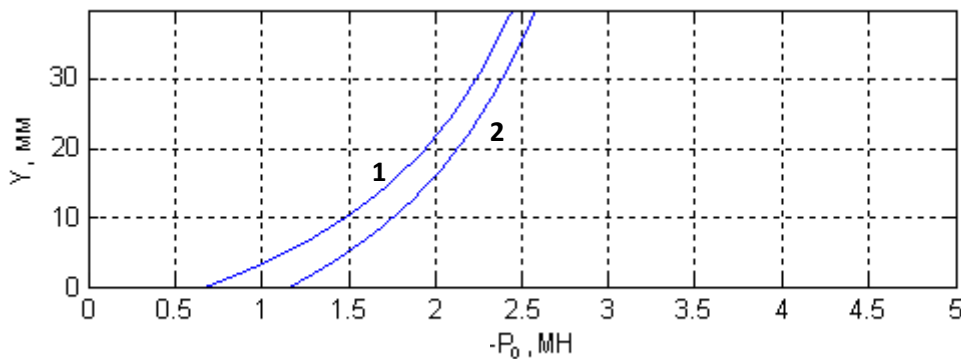


Рис. 3. Зависимость величины поперечного перемещения сечения  $s = l/2$  в 1 и 2 стержнях

На рисунке 3 показано изменение поперечного перемещения от приложенной продольной силы. Видно, что при  $P = P_0$  прогиб первоначально прямого стержня равен нулю, а затем резко возрастает. Фактически за момент потери устойчивости принимается момент, когда прогиб достигает некоторой достаточно большой величины, но значения силы при этом настолько большие, что напряжения превосходят предельные значения. Таким образом, негибкие стержни, а значит, и цилиндрические оболочки можно рассчитывать только на прочность.

#### Литература

1. Третьяков А. В., Зюзин В. И. Механические свойства металлов и сплавов при обработке давлением. Справочник. – М: Металлургия, 1973. – 224 с.
2. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. – М: Наука, 1988. – 712 с.