

**Kinematic analysis of spatial linkage by analytical method  
Gorshkov A. (Russian Federation)**

**Кинематический анализ пространственного рычажного механизма аналитическим методом**

**Горшков А. Д. (Российская Федерация)**

*Горшков Александр Деомидович / Gorshkov Aleksandr - кандидат технических наук, доцент,  
кафедра общинженерных дисциплин,  
Пермский военный институт внутренних войск, г. Пермь*

**Аннотация:** в статье рассмотрено определение кинематических параметров пространственного рычажного механизма. Для этой цели использовано два аналитических метода: матричный метод, изложенный в [1], и метод, предложенный в работах [2]-[6]. Проведено сравнение результатов, полученных в результате применения этих методов.

**Abstract:** in the article the definition of the kinematic parameters of spatial linkage is considered. For this purpose it is used two analytical methods: matrix method presented in [1] and the method proposed in [2]-[6]. The comparison of the results obtained by these methods is conducted.

**Ключевые слова:** механизм, кинематическая пара, скорость, ускорение.

**Keywords:** mechanism, kinematic pair, speed, acceleration.

Расчетную кинематическую схему механизма, выбор систем координат и направления углов вращения примем в соответствии с изложенным в [1].

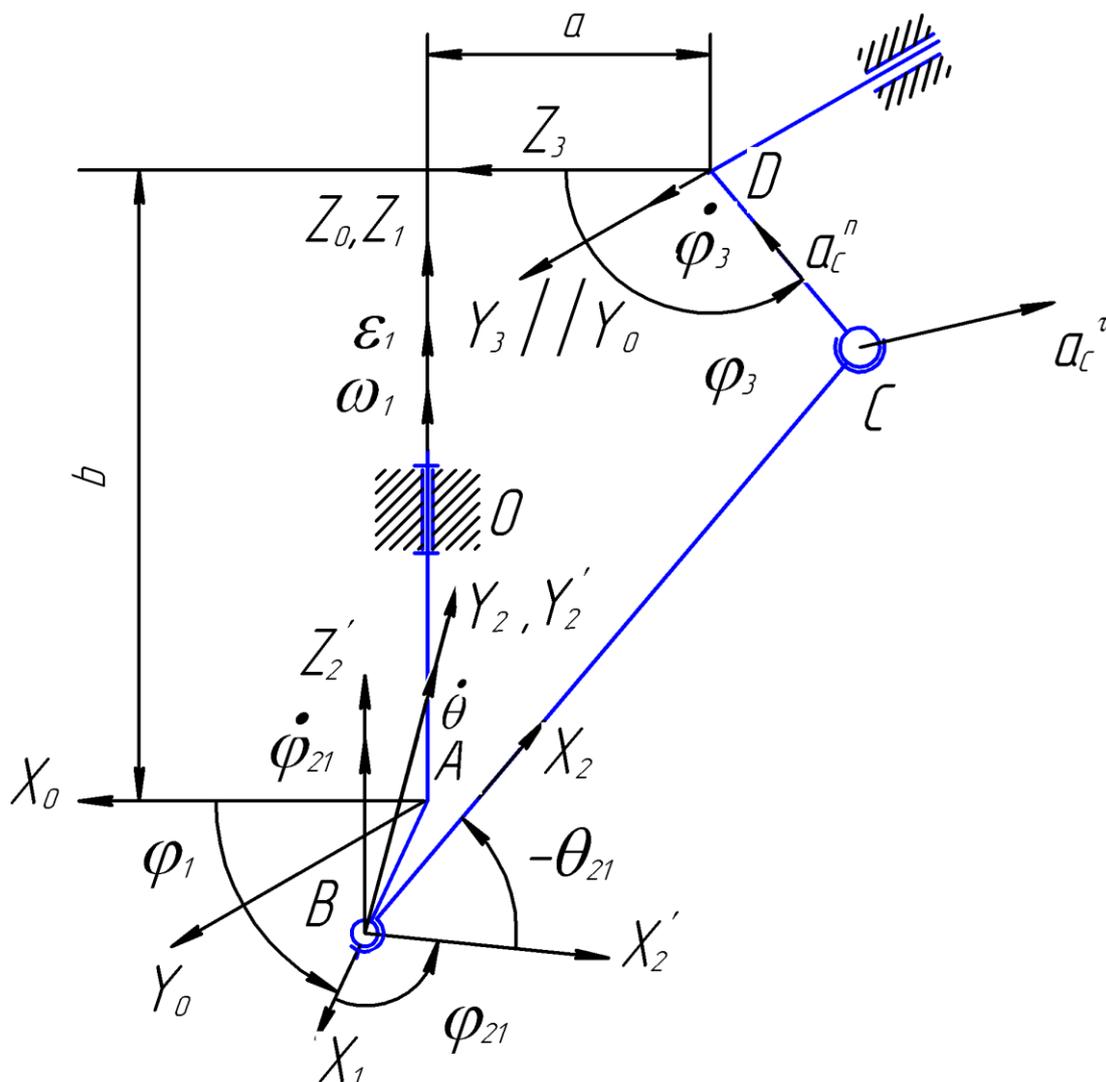


Рис. 1. Рычажный механизм

Структурный анализ данного механизма приведен в [2].

На рис. 1 приведены системы координат, описывающие работу механизма:

- $S_0(x_0, y_0, z_0)$  – неподвижная система координат, связанная со стойкой,
- $S_1(x_1, y_1, z_1)$  – подвижная система координат, связанная с кривошипом,
- $S_2(x_2, y_2, z_2)$  – подвижная система координат, связанная с шатуном,
- $S'_2(x'_2, y'_2, z'_2)$  – подвижная система координат, связанная с шатуном,
- $S_3(x_3, y_3, z_3)$  – подвижная система координат, связанная с коромыслом.

Требуется определить положение, скорости и ускорения всех звеньев механизма при заданном значении обобщенной координаты  $\varphi_1$ , известных размерах, указанных на кинематической схеме:  $l_{AB}$ ,  $l_{BC}$ ,  $l_{CD}$ ,  $a$ ,  $b$  и законах изменения углового ускорения и угловой скорости кривошипа.

Примем для определенности

$$l_{AB}=30 \text{ см}, l_{BC}=122,525 \text{ см}, l_{CD}=40 \text{ см}, a=53 \text{ см}, b=97 \text{ см},$$

$$\varepsilon_1=2 \text{ с}^{-2}, \omega_1=10 \text{ с}^{-1}, \varphi_1 = \frac{3 \cdot \pi}{4} = 135^\circ.$$

1. Определение углов и координат кинематических пар.

Определение этих кинематических параметров проведем в соответствии с [1]. Значения углов  $\theta_{21}$ ,  $\varphi_{21}$ ,  $\varphi_3$  получим из решения системы нелинейных уравнений, приведенной в работе [1, стр. 325]:

$$\begin{aligned} l_{AB} \cdot \cos \varphi_1 + l_{BC} \cdot \cos \theta_{21} \cdot \cos(\varphi_{21} + \varphi_1) &= l_{CD} \cdot \cos \varphi_3 - a \\ l_{AB} \cdot \sin \varphi_1 + l_{BC} \cdot \cos \theta_{21} \cdot \sin(\varphi_{21} + \varphi_1) &= 0 \\ -l_{BC} \sin \theta_{21} &= l_{CD} \cdot \sin \varphi_3 + b \end{aligned} \quad (1)$$

При выбранных исходных данных решение системы будет таким

$$\theta_{21} = -52,342^\circ, \varphi_{21} = 61,463^\circ, \varphi_3 = 180,00^\circ.$$

Координаты кинематической пары  $C$  в неподвижной системе координат будут такими

$$x_{C_0} = -93 \text{ см}, y_{C_0} = 0,0 \text{ см}, z_{C_0} = -97 \text{ см}.$$

2. Определение скоростей и ускорений в кривошипно-шатунном механизме.

2.1.1. Определение скоростей матричным методом [1].

В этом случае для определения скоростей и ускорений дифференцируются выражения (1), откуда получаем систему линейных уравнений относительно  $\dot{\theta}_{21}$ ,  $\dot{\varphi}_{21}$ ,  $\dot{\varphi}_3$ :

$$\begin{pmatrix} -l_{BC} \cdot \sin \theta_{21} \cdot \cos(\varphi_{21} + \varphi_1) & -l_{BC} \cdot \cos \theta_{21} \cdot \sin(\varphi_{21} + \varphi_1) & l_{CD} \cdot \sin \varphi_3 \\ -l_{BC} \cdot \sin(\varphi_{21} + \varphi_1) \cdot \sin \theta_{21} & l_{BC} \cdot \cos \theta_{21} \cdot \cos(\varphi_{21} + \varphi_1) & 0 \\ l_{BC} \cdot \cos \theta_{21} & 0 & l_{CD} \cdot \cos \varphi_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\theta}_{21} \\ \dot{\varphi}_{21} \\ \dot{\varphi}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1(l_{AB} \cdot \sin \varphi_1 + l_{BC} \cdot \cos \theta_{21} \cdot \sin(\varphi_{21} + \varphi_1)) \\ -\omega_1 \cdot (l_{AB} \cdot \cos \varphi_1 + l_{BC} \cdot \cos \theta_{21} \cdot \cos(\varphi_{21} + \varphi_1)) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Подставляя в (2) численные значения, получим систему уравнений

$$A \cdot X = P \quad (3)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} -93,023 & 21,213 & 0 \\ -27,489 & -71,787 & 0 \\ 74,855 & 0 & -40 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 \\ 930 \\ 0 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\varphi}_{21} \\ \dot{\varphi}_3 \end{pmatrix}$$

Решение системы

$$\dot{\theta}_{21} = -2,717 \text{ с}^{-1}, \dot{\varphi}_{21} = -11,915 \text{ с}^{-1}, \dot{\varphi}_3 = -5,085 \text{ м/с}. \quad (4)$$

Линейная скорость кинематической пары  $C$   $V_C=203,4 \text{ см/с}$ .

Проекция угловой скорости  $\vec{\omega}_2$  на оси координат  $(x_0, y_0, z_0)$  найдем из выражений (5-10)

$$\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_{21}, \quad (5)$$

$$\vec{\omega}_{21} = \vec{\dot{\theta}}_{21} + \vec{\dot{\varphi}}_{21}, \quad (6)$$

$$\vec{\omega}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$\vec{\dot{\theta}} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \cdot \sin(\varphi_{21} + \varphi_1) \\ -\dot{\theta} \cdot \cos(\varphi_{21} + \varphi_1) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2,717) \cdot \sin(61,463^\circ + 135^\circ) \\ -2,717 \cdot \cos(61,463^\circ + 135^\circ) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,76999 \\ 2,60561 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$\vec{\dot{\varphi}}_{21} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi}_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -11,519 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \omega_2^{(x_0)} &= \dot{\theta}_{21} \cdot \sin(\varphi_{21} + \varphi_1) = 0,76999 \text{ c}^{-1}, \\ \omega_2^{(y_0)} &= -\dot{\theta}_{21} \cos(\varphi_{21} + \varphi_1) = 2,60561 \text{ c}^{-1}, \\ \omega_2^{(z_0)} &= \dot{\varphi}_{21} + \dot{\varphi}_1 = -1,519 \text{ c}^{-1}. \end{aligned} \quad (10)$$

2.1.2. Определение скоростей методом аналитического решения векторных уравнений.

Определим полученное ранее значение скорости точки  $C$  методом аналитического решения векторных уравнений.

Для определения скорости  $C$  векторное уравнение запишем в виде

$$\vec{V}_C = \vec{V}_B + \vec{\omega}_2 \times \vec{\rho}_C \quad (10)$$

Вектор угловой скорости второго звена имеет вид

$$\vec{\omega}_2 = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_{21} \cdot \sin(\varphi_{21} + \varphi_1) \\ -\dot{\theta}_{21} \cdot \cos(\varphi_{21} + \varphi_1) \\ \dot{\varphi}_{21} + \dot{\varphi}_1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Отметим, что в этом случае нам не известны величины  $V_C, \dot{\theta}_{21}, \dot{\varphi}_{21}$ , а известны только их направления (Рис. 1).

Проекция радиус-вектора кинематической пары  $C$   $\vec{\rho}_C$  на оси координат будут такими

$$\rho_{CX} = x_C - x_B = -71,787 \text{ см}, \quad \rho_{CY} = y_C - y_B = -21,213 \text{ см}, \quad \rho_{CZ} = z_C - z_B = -97 \text{ см}.$$

Векторное произведение запишем в виде

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_2 \times \vec{\rho}_C &= \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dot{\theta}_{21} \cdot \sin(\varphi_{21} + \varphi_1) & -\dot{\theta}_{21} \cdot \cos(\varphi_{21} + \varphi_1) & \dot{\varphi}_{21} + \dot{\varphi}_1 \\ \rho_{CX} & \rho_{CY} & \rho_{CZ} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -\dot{\theta}_{21} \cdot \rho_{CZ} \cdot \cos(\varphi_{21} + \varphi_1) - \dot{\varphi}_{21} \cdot \rho_{CY} - \omega_1 \cdot \rho_{CY} \\ -\dot{\theta}_{21} \cdot \rho_{CZ} \cdot \sin(\varphi_{21} + \varphi_1) + \dot{\varphi}_{21} \cdot \rho_{CX} + \omega_1 \cdot \rho_{CX} \\ \dot{\theta}_{21} \cdot \sin(\varphi_{21} + \varphi_1) \rho_{CY} + \dot{\theta}_{21} \cdot \cos(\varphi_{21} + \varphi_1) \cdot \rho_{CX} \end{pmatrix} = \\ &= \dot{\theta}_{21} \begin{pmatrix} -\rho_{CZ} \cdot \cos(\varphi_{21} + \varphi_1) \\ -\rho_{CZ} \cdot \sin(\varphi_{21} + \varphi_1) \\ \rho_{CY} \cdot \sin(\varphi_{21} + \varphi_1) + \rho_{CX} \cdot \cos(\varphi_{21} + \varphi_1) \end{pmatrix} + \dot{\varphi}_{21} \begin{pmatrix} -\rho_{CY} \\ \rho_{CX} \\ 0 \end{pmatrix} + \omega_1 \begin{pmatrix} -\rho_{CY} \\ \rho_{CX} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Проекция векторов, входящих в соотношение (10) на оси неподвижной системы координат, приведены в таблице 1.

Таблица 1. Проекция векторов на оси координат

	$\vec{\dot{\varphi}}_3$	$\vec{V}_B$	$\vec{\omega}_1$	$\vec{\dot{\varphi}}_{21}$	$\vec{\dot{\theta}}_{21}$	$\vec{\rho}_c$
$\Pi p_x$	$l_{CD} \cdot \sin \varphi_3 =$ $40 \cdot 0 = 0$	$-\omega_1 l_{AB} \sin \varphi_1 =$ $-10 \cdot 30 \cdot 0,707 =$ $-212,132$	0	$-\rho_{CY} = 21,213$	$-\rho_{CZ} \cdot \cos(\varphi_{21} + \varphi_1) =$ $= -(-97) \cdot (-0,95900) =$ $= -93,023$	-71,787
$\Pi p_y$	0	$-\omega_1 l_{AB} \cos \varphi_1 =$ $10 \cdot 30 \cdot 0,707 =$ $212,132$	0	$\rho_{CX} = -71,787$	$\rho_{CZ} \cdot \sin(\varphi_{21} + \varphi_1) =$ $= -(-97) \cdot (-0,283340) =$ $= -27,48942$	-21,213
$\Pi p_z$	$l_{CD} \cdot \cos \varphi_3 =$ $= 40 \cdot (-1) =$ $-40$	0	10	0	$\rho_{CY} \cdot \sin(\varphi_{21} + \varphi_1) +$ $\rho_{CX} \cos(\varphi_{21} + \varphi_1) =$ $= (-21,213) \cdot (-0,28334) +$ $+ (-71,787) \cdot (-0,959) =$ $= 74,854$	-97

Систему алгебраических уравнений составим, исходя из векторного соотношения

$$\vec{V}_C - \vec{\dot{\theta}} \times \vec{\rho}_C - \vec{\dot{\varphi}} \times \vec{\rho}_C = \vec{V}_B + \vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}_C$$

Система уравнений в проекциях на оси имеет вид

$$\dot{\theta}_1 \cdot \begin{pmatrix} -\rho_{CZ} \cdot \cos(\varphi_{21} + \varphi_1) \\ \rho_{CZ} \cdot \sin(\varphi_{21} + \varphi_1) \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{\varphi}_{21} \cdot \begin{pmatrix} -\rho_{CY} \\ \rho_{CX} \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{\varphi}_3 \cdot \begin{pmatrix} l_{CD} \cdot \sin \varphi_3 \\ 0 \\ l_{CD} \cdot \cos \varphi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_1 l_{AB} \sin \varphi_1 \\ -\omega_1 l_{AB} \cos \varphi_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\omega_1 \cdot \rho_{CY} \\ \omega_1 \cdot \rho_{CX} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Подставляя численные значения из табл. 1, запишем

$$\begin{pmatrix} -93,023 & 21,213 & 0 \\ -27,489 & -71,787 & 0 \\ 74,854 & 0 & -40 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_{21} \\ \dot{\varphi}_{21} \\ \dot{\varphi}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -212,13 - 10 \cdot (-21,213) \\ 212,132 + 10 \cdot 71,787 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 930 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Получили систему уравнений, аналогичную (3).

Окончательно запишем

$$\begin{Bmatrix} \dot{\theta}_{21} \\ \dot{\varphi}_{21} \\ \dot{\varphi}_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} -2,717 \\ -11,915 \\ -5,085 \end{pmatrix}$$

2.2.1. Определение ускорений матричным методом [1].

Для вычисления ускорений по этому методу необходимо повторное дифференцирование соотношений (2), что также дает систему линейных уравнений относительно  $\ddot{\varphi}_{21}$ ,  $\ddot{\theta}_{21}$ ,  $\ddot{\varphi}_{30}$ . Система уравнений имеет вид

$$B \cdot Y = Q \quad (12)$$

где

$$B = \begin{pmatrix} -l_{BC} \cdot \sin \theta_{21} \cdot \cos(\varphi_{21} + \varphi_1) & -l_{BC} \cdot \cos \theta_{21} \cdot \sin(\varphi_{21} + \varphi_1) & l_{CD} \cdot \sin \varphi_3 \\ -l_{BC} \cdot \sin(\varphi_{21} + \varphi_1) \cdot \sin \theta_{21} & l_{BC} \cdot \cos \theta_{21} \cdot \cos(\varphi_{21} + \varphi_1) & 0 \\ l_{BC} \cdot \cos \theta_{21} & 0 & l_{CD} \cdot \cos \varphi_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -93,023 & 21,213 & 0 \\ -27,489 & -71,787 & 0 \\ 74,855 & 0 & -40 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} (-\varepsilon_1 l_{AB} \sin \varphi_1 - (\omega_1)^2 l_{AB} \cos \varphi_1 - (\dot{\theta})^2 l_{BC} \cos \theta_{21} \cos(\varphi_{21} + \varphi_1) + \\ + (\dot{\theta})^2 (\dot{\varphi}_{21} + \omega_1) \sin \theta_{21} \sin(\varphi_{21} + \varphi_1) l_{BC} - \\ - \varepsilon_1 l_{BC} \cos \theta_{21} \sin(\varphi_{21} + \varphi_1) + (\dot{\varphi}_{21} + \omega_1) \dot{\theta} l_{BC} \sin \theta_{21} \sin(\varphi_{21} + \varphi_1) - \\ - (\dot{\varphi}_{21} + \omega_1)^2 l_{BC} \cos(\varphi_{21} + \varphi_1) + (\dot{\varphi}_3)^2 l_{CD} \cos \varphi_3) \\ \\ (\varepsilon_1 l_{AB} \cos \varphi_1 - (\omega_1)^2 l_{AB} \sin \varphi_1 - (\dot{\theta})^2 l_{BC} \sin(\varphi_{21} + \varphi_1) \cos \theta_{21} - \\ - \dot{\theta} (\dot{\varphi}_{21} + \omega_1) l_{BC} \sin \theta_{21} \cos(\varphi_{21} + \varphi_1) + \\ + \varepsilon_1 l_{BC} \cos \theta_{21} \cos(\varphi_{21} + \varphi_1) - \dot{\theta} (\dot{\varphi}_{21} + \omega_1) l_{BC} \cos(\varphi_{21} + \varphi_1) \sin \theta_{21} - \\ - (\varphi_{21} + \omega_1)^2 l_{BC} \cos \theta_{21} \sin(\varphi_{21} + \varphi_1) \\ \\ (\dot{\theta})^2 l_{BC} \sin \theta_{21} + (\dot{\varphi}_3)^2 l_{CD} \sin \varphi_3 \end{pmatrix}$$

Подставляя численные значения, получим

$$Q = \begin{pmatrix} -2,166 \cdot 10^3 \\ 3,041 \cdot 10^3 \\ 716,076 \end{pmatrix}.$$

Вектор неизвестных величин имеет вид

$$Y = \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_{21} \\ \ddot{\varphi}_{21} \\ \ddot{\varphi}_3 \end{pmatrix}.$$

Результат решения этой системы:

$$\ddot{\theta}_{21} = 12,543 \text{ c}^{-2}, \ddot{\varphi}_{21} = -47,158 \text{ c}^{-2}, \ddot{\varphi}_3 = 5,553 \text{ c}^{-2}. \quad (13)$$

### 2.2.2. Определение ускорений методом аналитического решения векторных уравнений.

Для определения ускорения кинематической пары  $C$  аналитическим способом воспользуемся уравнением

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{\varepsilon}_2 \times \vec{\rho}_C + \vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{\rho}_C) \quad (14)$$

Где

- вектор ускорения

$$\vec{a}_C = \vec{a}_C^n + \vec{a}_C^r,$$

вектор  $\vec{a}_C^n$  направлен от  $C$  к  $D$  и численно равен  $a_C^n = (\dot{\varphi}_3)^2 l_{CD} = 1034,289 \text{ см/с}^2$ ,

вектор  $\vec{a}_C^r$  направлен перпендикулярно  $CD$  и численно равен  $a_C^r = (\ddot{\varphi}_3) l_{CD}$ ,

проекции векторов на неподвижные оси запишем в виде

$$\vec{a}_C^n = a_C^n \begin{pmatrix} -\cos \varphi_3 \\ 0 \\ \sin \varphi_3 \end{pmatrix} = 1034,289 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1034,289 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{a}_C^r = a_C^r \begin{pmatrix} -\sin \varphi_3 \\ 0 \\ -\cos \varphi_3 \end{pmatrix} = \ddot{\varphi}_3 \begin{pmatrix} 40 \cdot 0 \\ 0 \\ 40 \cdot 1 \end{pmatrix} = \ddot{\varphi}_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 40 \end{pmatrix}.$$

- вектор ускорения

$$\vec{a}_B = \vec{a}_B^n + \vec{a}_B^r,$$

вектор  $\vec{a}_B^n$  направлен от  $B$  к  $A$  и численно равен  $a_B^n = (\dot{\varphi}_1)^2 l_{AB} = 100 \cdot 30 = 3 \cdot 10^3 \text{ см/с}^2$ ,

вектор  $\vec{a}_B^r$  направлен перпендикулярно  $AB$  и численно равен  $a_B^r = (\ddot{\varphi}_1) \cdot l_{AB} = 2 \cdot 30 = 60 \text{ см/с}^2$ , проекции векторов на неподвижные оси запишем в виде

$$\vec{a}_B^n = a_B^n \begin{pmatrix} -\cos \varphi_1 \\ -\sin \varphi_1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot 10^3 \cdot \begin{pmatrix} 0,707 \\ -0,707 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,121 \\ -2,121 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 10^3,$$

$$\vec{a}_B^r = a_B^r \begin{pmatrix} -\sin \varphi_1 \\ \cos \varphi_1 \\ 0 \end{pmatrix} = 60 \begin{pmatrix} -0,707 \\ -0,707 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -42,42 \\ -42,42 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\vec{a}_B = \begin{pmatrix} 2121 - 42,42 \\ -2121 - 42,42 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2078,58 \\ -2163,42 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- согласно (11), вектор ускорения  $\vec{\varepsilon}_2$  запишем в виде

$$\frac{d\vec{\omega}_2}{dt} = \vec{\varepsilon}_2 = \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_{21} \sin(\varphi_{21} + \varphi_1) + \dot{\theta}_{21} (\dot{\varphi}_{21} + \dot{\varphi}_1) \cos(\varphi_{21} + \varphi_1) \\ -\ddot{\theta}_{21} \cos(\varphi_{21} + \varphi_1) + \dot{\theta}_{21} (\dot{\varphi}_{21} + \dot{\varphi}_1) \sin(\varphi_{21} + \varphi_1) \\ \ddot{\varphi}_{21} + \ddot{\varphi}_1 \end{pmatrix}$$

- векторное произведение  $\vec{\varepsilon}_2 \times \vec{\rho}_C$ :

$$\vec{\varepsilon}_2 \times \vec{\rho}_C = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \ddot{\theta}_{21} \sin(\varphi_{21} + \varphi_1) + \dot{\theta}_{21} (\dot{\varphi}_{21} + \dot{\varphi}_1) \cos(\varphi_{21} + \varphi_1) & -\ddot{\theta}_{21} \cos(\varphi_{21} + \varphi_1) + \dot{\theta}_{21} (\dot{\varphi}_{21} + \dot{\varphi}_1) \sin(\varphi_{21} + \varphi_1) & \ddot{\varphi}_{21} + \ddot{\varphi}_1 \\ \rho_{Cx} & \rho_{Cy} & \rho_{Cz} \end{pmatrix} =$$

=

$$\vec{i} \left( (-\ddot{\theta}_{21} \cos(\varphi_{21} + \varphi_1) + \dot{\theta}_{21} (\dot{\varphi}_{21} + \dot{\varphi}_1) \sin(\varphi_{21} + \varphi_1)) \rho_{Cz} - (\ddot{\varphi}_{21} + \ddot{\varphi}_1) \rho_{Cy} \right) - \\ - \vec{j} \left( (\ddot{\theta}_{21} \sin(\varphi_{21} + \varphi_1) + \dot{\theta}_{21} (\dot{\varphi}_{21} + \dot{\varphi}_1) \cos(\varphi_{21} + \varphi_1)) \rho_{Cz} - (\ddot{\varphi}_{21} + \ddot{\varphi}_1) \rho_{Cx} \right) + \\ + \vec{k} \left( (\ddot{\theta}_{21} \sin(\varphi_{21} + \varphi_1) + \dot{\theta}_{21} (\dot{\varphi}_{21} + \dot{\varphi}_1) \cos(\varphi_{21} + \varphi_1)) \rho_{Cy} - \right. \\ \left. - (-\ddot{\theta}_{21} \cos(\varphi_{21} + \varphi_1) + \dot{\theta}_{21} (\dot{\varphi}_{21} + \dot{\varphi}_1) \sin(\varphi_{21} + \varphi_1)) \rho_{Cx} \right).$$

Подставляя численные значения, получим

$$\varepsilon_2 \times \vec{\rho}_C = \begin{pmatrix} -\ddot{\theta}_{21} \cdot 93,023 + \ddot{\varphi}_{21} \cdot 21,213 + 185,255 \\ -\ddot{\theta}_{21} \cdot 27,451 - \ddot{\varphi}_{21} \cdot 71,787 - 627,578 \\ \ddot{\theta}_{21} \cdot 74,847 \end{pmatrix} = \ddot{\theta}_{21} \begin{pmatrix} -93,023 \\ -27,451 \\ 74,847 \end{pmatrix} + \ddot{\varphi}_{21} \begin{pmatrix} 21,213 \\ -71,787 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 185,225 \\ -627,58 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- вектор  $\vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{\rho}_C) = \vec{\omega}_2 (\vec{\omega}_2 \cdot \vec{\rho}_C) - \vec{\rho}_C (\vec{\omega}_2)^2$ .

Подставляя численные значения, получим

$$\vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{\rho}_C) = \begin{pmatrix} 1016,123 \\ -249,853 \\ 715,98 \end{pmatrix}.$$

Векторное уравнение (14) запишем в виде

$$\ddot{\theta}_{21} \begin{pmatrix} -93,023 \\ -27,451 \\ 74,847 \end{pmatrix} + \ddot{\varphi}_{21} \begin{pmatrix} 21,213 \\ -71,787 \\ 0 \end{pmatrix} + \ddot{\varphi}_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -40 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1034,289 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 185,225 \\ -627,58 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2078,58 \\ -2163,42 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1016,123 \\ -249,853 \\ 715,980 \end{pmatrix}$$

Окончательно систему уравнений запишем в виде

$$\begin{pmatrix} -93,023 & 21,213 & 0 \\ -27,451 & -71,787 & 0 \\ 74,847 & 0 & -40 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_{21} \\ \ddot{\varphi}_{21} \\ \ddot{\varphi}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2165,992 \\ 3041,155 \\ 715,980 \end{pmatrix}$$

Видим, что система уравнений аналогична системе (12), полученной матричным методом. Решение этой системы будет таким

$$\ddot{\theta}_{21} = 12,53 \text{ c}^{-2}, \ddot{\varphi}_{21} = -47,162 \text{ c}^{-2}, \ddot{\varphi}_3 = 5,548 \text{ c}^{-2}$$

Используя полученные значения, по формуле (14) легко определить ускорение любой точки звена 2.

#### **Заключение.**

Сравнение изложенных методов позволяет утверждать, что аналитический метод решения векторных уравнений может быть использован для расчета кинематических параметров пространственных механизмов.

#### *Литература*

1. Кинематический анализ пространственного рычажного механизма методом преобразования координат. Анципорович П. П., Акулич В. К., Дубовская Е. М. Белорусский национальный технический университет, Минск. Репозиторий БНТУ.
2. Горшков А. Д. Структурный анализ пространственных механизмов. European Science, February 2016, No. 2 (12), стр. 17-20.
3. Горшков А. Д. Определение кинематических характеристик шарнира Гука аналитическим методом. European Science, February 2016, No. 2(12), стр. 20-26.
4. Горшков А. Д. Применение аналитического метода в кинематическом анализе плоских механизмов. XV Международная научно-практическая конференция: «Научное обозрение физико-математических и технических наук в XXI веке» Россия, г. Москва, 27-28.03.2015. – С. 16-19.
5. Горшков А. Д., Кузьминова Н. А. Применение аналитического метода в силовом анализе рычажного плоского механизма. European Research: Innovation in Science, Education and Technology // European research № 3 (4) / Сб. ст. по мат.: IV межд. науч.-практ. конф. (Россия, Москва, 23-24 мая, 2015). М. - 98 с.
6. Горшков А. Д., Примостка В. Е. Применение аналитического метода в кинематическом анализе плоских многосвязных механизмов. European Research: Innovation in Science, Education and Technology // European Research № 8 (9).
7. Сб. ст. по мат.: IX межд. науч.-практ. конф. (Россия, Москва, 23-24 октября, 2015). М. 2015, 6-17 с.