

The decision trigonometrical tasks with geometrical methods
Rahimov N. (Republic of Uzbekistan)

Решение тригонометрических задач геометрическими методами
Рахимов Н. Н. (Республика Узбекистан)

*Рахимов Насриддин Номозович / Rahimov Nasriddin - заведующий кафедрой,
кафедра математики и информатики,
Академический лицей № 2 при Самаркандском государственном университете,
г. Самарканд, Республика Узбекистан*

Аннотация: в статье указан метод решения некоторых тригонометрических задач с помощью геометрии.

Abstract: the article specifies a method for solving some trigonometric problems using geometry.

Ключевые слова: тригонометрия, прямоугольный треугольник, корень, аркфункции и тождество.

Keywords: trigonometry, rectangular triangle, root and identity.

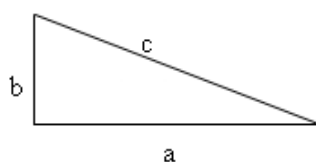
Некоторые тригонометрические задачи не решаются привычными для нас методами или решаются очень сложно, а использование какого-нибудь геометрического метода дает короткое и красивое решение.

1-задача. Выразить через все остальные аркфункции $\arcsin \frac{1}{\sqrt{65}}$.

Решение. Так как $0 \leq \arcsin \frac{1}{\sqrt{65}} \leq \frac{\pi}{2}$, то $\arcsin \frac{1}{\sqrt{65}}$ можно рассматривать как радианную меру острого угла прямоугольного треугольника, в котором противолежащий этому углу катет, $b = 1$, гипотенуза $c = \sqrt{65}$. По теореме Пифагора можно найти другой катет равный

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{65 - 1} = 8 \quad (1)$$

Угол α можно рассматривать как арккосинус или арктангенс, или арккотангенс соответствующих чисел (рис. 1).

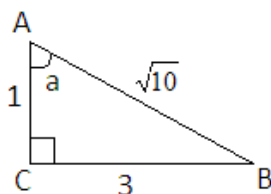


1-рис

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} = \operatorname{arctg} \frac{1}{8}, \alpha = \operatorname{arcctg} \frac{a}{b} = \frac{8}{1} = 8 \text{ и } \alpha = \operatorname{arccos} \frac{8}{\sqrt{65}} \quad (2)$$

2-задача. Вычислить $\cos\left(\operatorname{arcctg} \frac{1}{3}\right)$.

Решение. Построим следующий прямоугольный треугольник ABC (рис. 2):



2-рис.

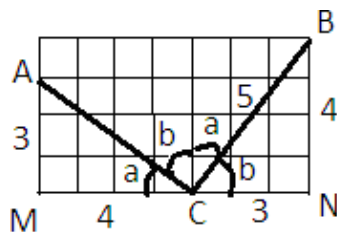
Из этого верно равенство $a = \operatorname{arccctg} \frac{1}{3}$, $\operatorname{ctga} = \frac{1}{3}$, $\cos a = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $a = \arccos \frac{1}{\sqrt{10}}$. Тогда,

$$\cos\left(\operatorname{arccctg} \frac{1}{3}\right) = \cos\left(\arccos \frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

3-задача. Вычислить.

$$\operatorname{arctg} \frac{3}{4} + \arccos \frac{3}{5} \quad (3)$$

Решение. Рисуем следующий прямоугольный треугольник АВМ и ВСN (рис. 3).



3-рис.

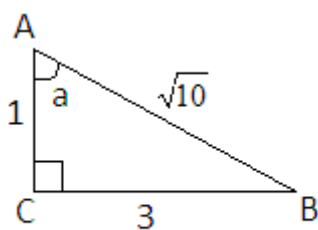
Пусть a и b – острый угол прямоугольного треугольника.

На это $\operatorname{tga} = \frac{3}{4} \Rightarrow a = \operatorname{arctg} \frac{3}{4}$, $\cos b = \frac{3}{5} \Rightarrow b = \arccos \frac{3}{5}$, а также очевидно из рисунка $a+b=90^\circ$.

4-задача. Найдите значение

$$\frac{3\sin a}{5\sin^3 a + 10\cos^3 a}, \text{ если } \operatorname{tga} = 3 \quad (4)$$

Решение. Из следующего прямоугольного треугольника и $\operatorname{tga} = 3$, мы найдём $\sin a = \frac{3}{\sqrt{10}}$ и $\cos a = \frac{1}{\sqrt{10}}$ (рис. 4)



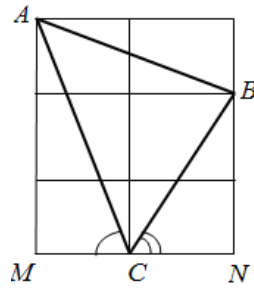
4-рис.

$$\text{Тогда, ответ: } \frac{3\sin a}{5\sin^3 a + 10\cos^3 a} = \frac{3 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}}}{5 \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^3 + 10 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^3} = \frac{9}{\frac{27}{2} + 1} = \frac{18}{29}$$

5-задача. Вычислить

$$\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3 + \operatorname{arctg} 1 \quad (5)$$

Решение. Выполним следующие построение: $\operatorname{arctg} 3 = \angle ACM$, $\operatorname{arctg} 2 = \angle BCN$ (рис. 5).



5-рис.

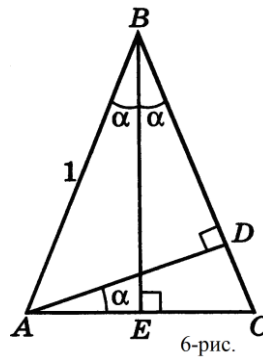
Тогда $\arctg 1 = \angle BAC$, так как $\angle BCA$ - острый угол прямоугольного равнобедренного треугольника ABC с прямым углом B ($BC = AB = \sqrt{5}$, $AC = \sqrt{10}$ по теореме Пифагора, см чертеж), а по теореме, обратной теореме Пифагора, $AC^2 = AB^2 + BC^2$ то есть $10 = 5 + 5$, (следовательно $\angle CBA = 90^\circ$, а $\angle BCA = 45^\circ$).

Таким образом, $\arctg 2 + \arctg 3 + \arctg 1 = \angle BCN + \angle ACM + \angle BCA = \angle MCN = 180^\circ = \pi$. Ответ: π .

6-задача. Доказать тождество

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha, \quad (6)$$

Решение. Построим равнобедренный треугольник, с баковой стороны равен 1 и угол вершины 2α . Этот треугольник с опущенной высотой AD и BE (рис. 6).



6-рис.

Очевидно, $AD = \sin 2\alpha$, $AE = EC = \sin \alpha$. Кроме этого из подобных треугольников

$\triangle ABE \sim \triangle CAD$, будет $\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{AD}$. От этого равенство можно записать $\frac{1}{2 \sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin 2\alpha}$. Тогда $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$.

7-задача. Доказать тождество:

$$1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha, \quad (7)$$

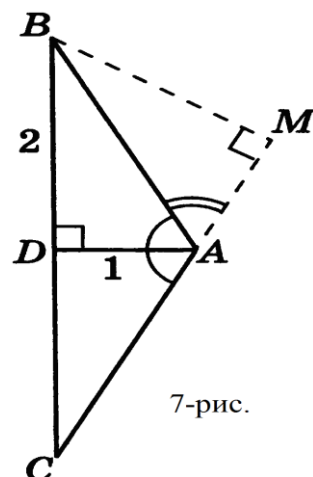
Решение. Из рисунка 6-задачи мы найдем $BD = \cos 2\alpha$, $AE = EC = \sin \alpha$, $CD = 1 - \cos 2\alpha$. Кроме этого из подобных треугольников $\triangle ABE \sim \triangle CAD$, будет $\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{AD}$.

Тогда, $\frac{1}{2 \sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos 2\alpha}$. Значит $1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$

8-задача. Вычислить:

$$\cos (2\arctg 2), \quad (8)$$

Решение. Используем следующие треугольники (рис. 7):



Из этого равнобедренного треугольника BAC , верно $\angle BAC = 2\arctg 2$. Этот треугольник тупоугольный, будет $\arctg 2 > \arctg 1 = \frac{\pi}{4}$. Значит, $\cos(2\arctg 2) = -\cos \angle BAM$. От этого равенство можно записать $\cos \angle BAM = \frac{AM}{AB}$. В прямоугольных треугольниках $\triangle BAM$ используем из теоремы Пифагора $AM = \sqrt{AB^2 - BM^2}$, из треугольника $\triangle ABD$ найдем $AB = \sqrt{5}$. Тогда $BM = \frac{2S_{\triangle ABC}}{AC} = \frac{4}{\sqrt{5}}$, здесь BM - высота треугольника. Теперь найдем отрезок AM , $AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \frac{3}{\sqrt{5}}$, тогда будет $\cos(2\arctg 2) = -\frac{3}{5}$. Ответ: $\frac{3}{5}$

Литература

1. Генкин Г. З. Геометрические решения негеометрических задач: кн. для учителя. — М.: Просвещение, 2007. — 79 с.
2. Исраилов И., Пашаев З. Геометрия 1-часть. Учебник академический лицей. Ташкент, Издательство «Учитель» 2004 г.
3. Научный журнал «Физика, математика и информатика» Ташкент. 2015/2.