THE WAVE EQUATION FOR NON-RECIPROCAL MEDIA

Glushchenko A.G.[1], Glushchenko E.P.[2] (Russian Federation)
Email: Glushchenko337@scientifictext.ru

[1]Glushchenko Alexander Grigorievich – Doctor of Physical Science, Professor;
[2]Glushchenko Evgenia Pavlovna – Candidate PhD, Associate Professor,
DEPARTMENT OF PHYSICS,
VOLGA STATE UNIVERSITY OF TELECOMMUNICATIONS AND INFORMATION,
SAMARA

Abstract: *this paper explores the wave processes in media with a special type of anisotropy – different speed of wave propagation in forward and reverse directions. This property is characteristic in particular for waves in moving media, waves in gyrotropic media. The article describes a new wave equation, which describes waves in a medium with non-reciprocal in opposite directions by the parameters. The obtained dispersion equation of waves in non-reciprocal environments and it solutions for forward and backward waves. Formulated Cauchy problem for the wave equation non-reciprocal environments, and its solution is obtained in the form of a generalized formula of D'alembert.*

Keywords: *non-reciprocal environment, wave equation, Cauchy problem.*

ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ НЕВЗАИМНЫХ СРЕД

Глущенко А.Г.[1], Глущенко Е.П.[2] (Российская Федерация)

Глущенко Александр Григорьевич – доктор физико-математических наук, профессор;
Глущенко Евгения Павловна – кандидат физико-математических наук, доцент,
кафедра физики,
Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики,
г. Самара

Аннотация: *в этой публикации рассматриваются волновые процессы в средах с особым типом анизотропии – различной скорости распространения волн в прямом и обратном направлениях. Это свойство характерно, в частности, для волн в подвижных средах, волн в гиротропных средах. В статье получено новое волновое уравнение, которое описывает волны в среде с невзаимными во взаимно противоположных направлениях параметрами. Получено дисперсионное уравнение волн в невзаимной среде и его решения для прямых и обратных волн. Сформулирована задача Коши для волнового уравнения невзаимных сред и получено его решение в виде обобщенной формулы Даламбера.*

Ключевые слова: *невзаимные среды, волновое уравнение, задача Коши.*

Введение. Волновые процессы большей частью описываются дифференциальными уравнениями в частных производных второго порядка [1]. Вывод волновых уравнений волн в структурах различной физической природы (упругих, электромагнитных и др.) дает в пространственно одномерном приближении волновое уравнение гиперболического типа [1]:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}, \qquad (1)$$

решение которого может быть представлено простыми волнами $f = \varphi(x - ct) + \psi(x + ct)$, распространяющимися с одинаковой скоростью c во взаимно противоположных (прямом и обратном) направлениях. Скорость распространения волн c является величиной, определяемой физической природой волнового процесса. Вместе с тем, взаимная структура - это только частный случай более общей ситуации, когда параметры сред или структур анизотропны. На практике известно достаточно много физических сред и структур, когда распространение волн различной физической природы во взаимно противоположных направлениях не равнозначно, в том числе, различна скорость распространения прямых и обратных волн [2-6]. Это свойство уже достаточно давно используется в ряде устройств и приборов различных частотных диапазонов, наиболее широко в микроволновой ферритовой технике [2], в оптике, акустике. Невзаимность физических свойств в прямом и обратном направлениях означает, что волновые уравнения для прямых и обратных волн различны. Решение задач дифракции, интерференции и других в этом случае базируется на суперпозиции решений, описывающих волны, распространяющихся в противоположных направлениях, различными волновыми уравнениями, что не всегда удобно. Скорость волн прямых и обратных волн различна $c_{\pm}$. В отсутствие внешних воздействий (например, в неподвижной изотропной среде $c_+ = c_- = c$). При движении среды вдоль оси 0*x* со скоростью u в наиболее простом случае скорость упругой волны в направлении движения среды принимает значение $c_+ = c + u$, в противоположном направлении $c_- = c - u$. Эффект увлечения волнового процесса движением среды проявляется также для электромагнитных волн. Эффект невзаимности хорошо известен в анизотропных (в частности, гиротропных) средах [4-6]. В этом случае волновой процесс меняет свой характер и для его исследования обобщить уравнение (1), которое не описывает волновые уравнения в невзаимных средах, что является предметом анализа данной статьи.

Постановка задачи. Для простоты рассмотрим здесь пространственно одномерную структуру, где проявляются основные физические свойства сред и структур, поддерживающих волновые процессы. Рассматриваются особенности упругих продольных колебаний в упругой среде в условиях различия скоростей прямых и обратных волн.

Простые волны, распространяющиеся в прямом $\varphi(x - ct)$ и обратном $\psi(x + ct)$ направлениях, удовлетворяют уравнениям:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi(x,t) = 0 \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi(x,t) = 0$$

мультипликация которых дает известное волновое уравнение (1)

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) f(x,t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

В этом случае волновое уравнение принимает вид:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{c_+ - c_-}{c_+ c_-}\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} - \frac{1}{c_+ c_-}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) f(x,t) = 0 \qquad (2)$$

отличается от (1) дополнительным слагаемым

$$\frac{c_+ - c_-}{c_+ c_-}\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial t}$$

величина которого пропорциональна разности скоростей волн в прямом (c_+) и обратном (c_-) направлениях. Этот параметр может рассматриваться как мера невзаимности среды или структуры. В частном случае среды с взаимными параметрами (например, неподвижной среды для акустических волн) скорости прямой и обратной волн одинаковы ($c_+ = c_- = c$) и уравнение (2) переходит в хорошо изученное уравнение (1). Рассмотрим особенности волновых процессов в условиях различия скоростей прямых и обратных волн $c_+ \neq c_-$. Уравнение (2) является гиперболическим [1], решение уравнения для монохроматических прямых и обратных волн ищутся в виде $f(x,t) = A \cdot \exp i(\omega t - hx) + B \cdot \exp i(\omega t + hx)$. Дисперсионное уравнение для постоянной распространения вдоль оси 0*x* принимает вид квадратного уравнения относительно постоянной распространения:

$$h^2 - \omega\frac{c_+ - c_-}{c_+ c_-}h - \frac{\omega^2}{c_+ c_-} = 0. \qquad (3)$$

Имеющего два решения $h_1 = \omega / c_+$, $h_2 = -\omega / c_-$, соответствующие прямым и обратным волнам. При $c_+ = c_- = c$ волновые числа прямых и обратных волн совпадают $h_1 = h_2 = h$. Рассмотрим особенности физических процессов в невзаимной среде.

Основные результаты. Для полного и однозначного определения движения точек невзаимной среды к волновому уравнению (2) добавим начальные условия, описывающие состояние стержня в начальный момент времени (*t*=0). Например, для упругих волн функция давления:

$$p(t = 0, x) = f(x)$$

и для скорости частиц

$$\partial p(t=0,x)/\partial x = g(x),$$

где функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы на всей числовой оси. Такая задача с начальными условиями является обобщением задачи Коши, переходящим в известную задачу Коши [1] при $c_+ = c_-$.

Общим решением исходного уравнения является функция:

$$f(t,x) = \varphi(x - c_+t) + \phi(x + c\_t).$$

Из начальных условий: $f(0,x) = \varphi(x) + \phi(x) = f(x)$, тогда

$$f_t(t,x) = -c_+\varphi'(x - c_+t) + a\_\phi'(x + c\_t),$$

$$f_t(0,x) = -c_+\varphi'(x) + c\_\phi'(x) = g(x).$$

Интегрируя последнее равенство по координате, получим:

$$-c_+\varphi(x) + c\_\phi(x) = \int_{x_0}^{x} g(z)dz + C,$$

где x_0 и C – постоянные. Из системы уравнений:

$$\begin{cases} \varphi(x) + \phi(x) = f(x) \\ -c_+\varphi(x) + c\_\phi(x) = \int_{x_0}^{x} g(z)dz + C \end{cases}$$

находим:

$$\begin{cases} \varphi(x) = \dfrac{1}{c_+ + c_-}\left[c_+ f(x) + \int_{x_0}^{x} g(z)dz + C\right] \\ \phi(x) = \dfrac{1}{c_+ + c_-}\left[c_- f(x) - \int_{x_0}^{x} g(z)dz - C\right] \end{cases}$$

Полученные равенства должны выполняться для любого значения аргумента. Подставляя в (8) найденные значения φ и ψ, будем иметь:

$$f(t,x) = \frac{1}{c_+ + c_-}\left[c_+ f(x - c_+t) + c_- f(x + c\_t) + \int_{x-c_+t}^{x+c\_t} g(z)dz\right]. \qquad (4)$$

Найденное решение является обобщением формулы Даламбера решения обобщенной задачи Коши для волнового уравнения невзаимной среды.

Рассмотрим решение волнового уравнения для невзаимной среды при начальных условиях:

$$f(t=0) = ch(x), \quad \frac{\partial f(t=0)}{\partial t} = \cos x.$$

Использование обобщенной формулы Даламбера (4) описывает волновой процесс в виде функции:

$$f(t,x) = \frac{1}{c_+ + c_-}\left[c_+ ch(x - c_+t) + c\_ch(x + c\_t) + \int_{x-c_+t}^{x+c\_t} \cos(z)dz\right] =$$

$$= \frac{1}{c_+ + c_-}\left[c_+ ch(x - c_+t) + c\_ch(x + c\_t) + \sin(x - c_+t) - \sin(x + c\_t)\right]$$

Выводы. Получено волновое уравнение для невзаимной среды и решение задачи Коши для волнового уравнения, описывающего физические процессы в невзаимных средах. Получено дисперсионное уравнение и решения для прямых и обратных волн. Получена формула Даламбера для решения задачи Коши для волнового уравнения невзаимной среды.

Список литературы / References

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. Изд-во МГУ, 2004. 798 с.
2. *Микаэлян А.Л.* Теория и применение ферритов на сверхвысоких частотах. М.: Госэнергоиздат, 1963. 663 с.
3. *Глущенко А.Г., Головкина М.В.* Невзаимные свойства волноводной структуры с пленками сверхпроводника второго рода и нелинейного диэлектрика // Фундаментальные и прикладные проблемы физики. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://econf.rae.ru/article/1515/ (дата обращения: 16.02.2018).
4. *Глущенко А.Г., Глущенко Е.П., Устинова Е.С.* Невзаимные волновые процессы // European research, 2015. № 10 (11). С. 9-12.
5. *Глущенко А.Г., Глущенко Е.П.* Эффект Доплера в невзаимных средах // European research: Innovation in Science, Education and Technology Москва, 8-9 ноября 2017 г. С. 6-10. DOI: 10.20861/2410-2873-2017-33-003.
6. *Наний О.Е.* Невзаимные оптические эффекты при анизотропной дифракции на бегущей ультразвуковой волне. Квантовая электроника. 23:2 (1996), С. 172–176.