A SAMPLE FROM A CONTINUOUS DISTRIBUTION

Kabardov A.S.[1], Shidugov I.Z.[2], Pazova B.I.[3], Balaeva F.R.[4], Pazova Z.I.[5], Tapov A.A.[6] (Russian Federation) Email: Kabardov339@scientifictext.ru

[1]Kabardov Aslan Sosrukovich – Student,
DEPARTMENT OF INFORMATICS AND COMPUTER ENGINEERING;
[2]Shidugov Islam Zhiraslanovich – Student,
DEPARTMENT INFORMATION TECHNOLOGIES IN MANAGEMENT OF TECHNICAL SYSTEMS
INSTITUTE OF INFORMATICS, ELECTRONICS AND COMPUTER TECHNOLOGIES;
[3]Pazova Bella Igorevna – Student,
DEPARTMENT TOURISM,
INSTITUTE OF SOCIAL WORK AND TOURISM;
[4]Balaeva Farida Ramazanovna – Master,
DIRECTION: MEDICAL PHYSICS,
THEORETICAL AND EXPERIMENTAL DEPARTMENT
INSTITUTE OF PHYSICS AND MATHEMATICS;
[5]Pazova Zalina Igorevna – Student,
DEPARTMENT ARCHITECTURAL DESIGN, DESIGN AND DECORATIVE AND APPLIED ART
INSTITUTE OF ARCHITECTURE, CONSTRUCTION AND DESIGN;
[6]Tapov Asker Ahmedovich – Master,
DEPARTMENT BUILDING STRUCTURES AND MECHANICS
INSTITUTE OF ARCHITECTURE, CONSTRUCTION AND DESIGN,
KABARDINO-BALKARIAN STATE UNIVERSITY,
NALCHIK

Abstract: *in the modeling example, all the distributions from which we sampled were "discrete" distributions obtained from frequency observations. We have already noted in our previous works that a sample may be required from the continuous density of the probability distribution given either by a mathematical function or graphically by means of a continuous curve. The sampling procedure from this distribution is as follows. Draw a graph of the distribution function of the accumulated probability. We then select a random number between 0 and 1 (with any number of decimal places). Then we draw a horizontal line from the point L to the intersection with our curve, we obtain the point M and project it onto the X axis. The abscissa ON is taken as the chosen value of x. This method is a "continuous" analog of the method that was used for sampling from the "discrete" frequency distribution in our example from medicine.*
Keywords: *mathematics, queuing theory, programming.*

ВЫБОРКА ИЗ НЕПРЕРЫВНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Кабардов А.С.[1], Шидугов И.Ж.[2], Пазова Б.И.[3], Балаева Ф.Р.[4], Пазова З.И.[5], Тапов А.А.[6] (Российская Федерация)

[1]Кабардов Аслан Сосрукович – студент,
кафедра информатики и вычислительной техники;
[2]Шидугов Ислам Жираcланович – студент,
кафедра информационных технологий в управлении техническими системами
Институт информатики, электроники и компьютерных технологий;
[3]Пазова Белла Игоревна – студент,
кафедра туризма
Институт социальной работы и туризма;
[4]Балаева Фарида Рамазановна – магистр,
направление: медицинская физика,
теоретическая и экспериментальная кафедра
Институт физики и математики;
[5]Пазова Залина Игоревна – студент,
кафедра архитектурного проектирования, дизайна и декоративно-прикладного искусства
Институт архитектуры, строительства и дизайна;
[6]Тапов Аскер Ахмедович – магистр,
кафедра строительных конструкций и механики
Институт архитектуры, строительства и дизайна,
Кабардино-Балкарский государственный университет,
г. Нальчик

Аннотация: *в примере с моделированием все распределения, из которых мы производили выборки, были «дискретными» распределениями, полученными по наблюдениям частот. Мы уже отмечали в своих*

предыдущих работах, что может потребоваться выборка из непрерывной плотности распределения вероятности, заданной либо математической функцией, либо графически с помощью непрерывной кривой. Методика выборки из такого распределения следующая. Начертим график функции распределения накопленной вероятности. Выбираем затем случайное число, лежащее между 0 и 1 (с любым количеством десятичных знаков). Затем проводим из точки L горизонтальную прямую до пересечения с нашей кривой, получаем точку M и проектируем ее на ось X. Абсцисса ON принимается в качестве выбранного значения x. Этот метод - «непрерывный» аналог метода, который был применен для выборки из «дискретного» распределения частот в нашем примере из медицины.
Ключевые слова: *математика, теория очередей, программирование.*

В примере с моделированием все распределения, из которых мы производили выборки, были «дискретными» распределениями, полученными по наблюдениям частот. Мы уже отмечали в своих предыдущих работах, что может потребоваться выборка из непрерывной плотности распределения вероятности, заданной либо математической функцией, либо графически с помощью непрерывной кривой. Методика выборки из такого распределения следующая. Начертим график функции распределения накопленной вероятности. Выбираем затем случайное число, лежащее между 0 и 1 (с любым количеством десятичных знаков); оно представлено ординатой OL на рис. 1.

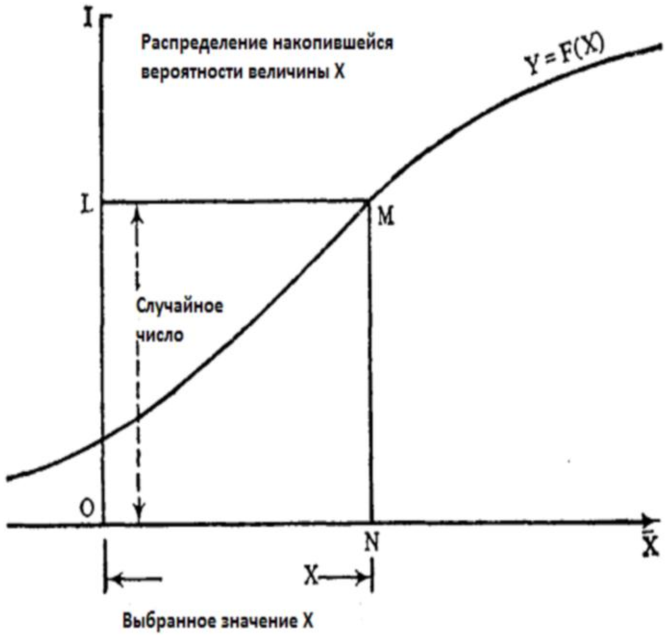

Рис. 1. Выборка из непрерывного распределения

Затем проводим из точки L горизонтальную прямую до пересечения с нашей кривой, получаем точку M и проектируем ее на ось X. Абсцисса ON принимается в качестве выбранного значения x. Этот метод «непрерывный» аналог метода, который был применен для выборки из «дискретного» распределения частот в нашем примере из медицины [1].

Псевдослучайные числа

Теперь мы должны вернуться к вопросу, который поставили ранее, а именно: как можно образовать удовлетворительную последовательность псевдослучайных чисел? С практической точки зрения нам нужен метод, с помощью которого компьютер мог бы генерировать последовательность чисел x_0, x_1, x_2, ... (с общим членом x_i) заданной длины и такую, чтобы числа в ней удовлетворяли соответствующим статистическим проверкам на случайность.

Одним из первых был предложен метод середины квадрата, в котором x_{i+1}-й член последовательности состоял из средних цифр x_i^2. Было обнаружено, что этот метод является неудовлетворительным, и вместо него теперь широко применяются так называемые конгруэнтные методы. Основное рекуррентное соотношение в них таково:

$x_{i+1} = ax_i$ (по модулю m) (1), его можно обобщить на $x_{i+1} = (ax_i + c)$ (по модулю m) (2), где a, x_i и c — целые числа между 0 и m — 1 [2].

Часто удобно сделать так, чтобы все числа лежали в интервале (0,1). Для этого каждое x_i нужно лишь разделить на m. Выражение «по модулю m» в формуле (1) означает, что x_{i+1} является остатком от деления ax_i на m. Так, 8 (по модулю 3) =2, а 8 (по модулю 4) =0. Аналогично для формулы (2). На практике m — это большое целое число, обычно какая-либо степень 2, и обусловлено оно конструкцией компьютера. Почти во всех генераторах случайных чисел используется тот факт, что любой компьютер оперирует с числами конечной длины [3].

Теперь, поскольку в (1) или (2) x_i могут принимать только m различных значений, любая последовательность, порожденная рекуррентным соотношением «по модулю m», должна повторяться не более чем через m шагов, т.е. последовательность должна быть периодической с периодом, не превышающим m. Например, если m= 16, a = 3, c= 1 и x_0 = 2, последовательность, порожденная соотношением (2), такова: 2, 7, 6, 3, 10, 15, 14, 11, 2, 7, ... с периодом 8. Мы не можем избежать такой периодичности, но мы должны гарантировать, что период много больше, чем количество случайных чисел, которое требуется для любого единичного эксперимента по моделированию. Значение m обычно достаточно велико, чтобы удовлетворять этому критерию (как правило, оно лежит между 2^{30} и 2^{40}), но для «успокоения совести» можно обратиться к некоторым элементарным результатам теории чисел. [4]

Можно показать, что, если пользоваться рекуррентным соотношением (2), всегда можно добиться полного периода m при условии, что удовлетворяются определенные требования. Обычно, когда m является степенью 2, эти требования заключаются в том, чтобы:

1) с было нечетным и 2) a было на единицу больше, чем число, кратное 4. Чтобы увидеть, что это означает, рассмотрим несколько простых примеров:

1) x_{i+1}= ($5x_i$ + 1) (по модулю 8), где x_0 = 2. Последовательность: 2, 3, 0, 1, 6, 7, 4, 5, 2, 3, ... с максимально возможным периодом 8;

2) x_{i+1}= ($3x_i$+1) (по модулю 8), где x_0 = 2. Последовательность: 2, 7, 6, 3, 2, 7, ... с периодом, равным лишь 4 [5].

С другой стороны, если для порождения нашей последовательности чисел мы воспользуемся соотношением (1), где m опять является степенью 2, то максимально возможный период равен лишь $\frac{m}{4}$; он получается, если: 1) x_0 нечетно и 2) a отличается на 3 от ближайшего числа, кратного 8.

Вот несколько примеров, показывающих, что может быть в этом случае:

1) x_{i+1} = $3x_i$ (по модулю 8), x_0 = 3, последовательность: 3, 1, 3, ... с периодом 2; он является максимально возможным;

2) x_{i+1} = $3x_i$ (по модулю 8), x_0 = 4, последовательность: 4, 4, 4, ... с периодом 1;

3) x_{i+1}=$2x_i$ (по модулю 8), x_0=3, последовательность: 3, 6, 4, 0, 0, ..., и процесс обрывается на четвертом члене;

4) x_{i+1} = $3x_i$ (по модулю 16), x_0 = 1, последовательность: 1, 3, 9, 11, 1, 3, ... и имеет максимально возможный период 4.

Результаты, которые мы только что обсудили, говорят о максимально возможном периоде последовательности, но не дают гарантий относительно ее случайности. Последовательность может обладать полным периодом, но быть совершенно неудовлетворительной. Рассмотрим пример:

x_{i+1}= ($33x_i$+49) (по модулю 128).

Для последовательности, порожденной таким соотношением, теорией гарантируется полный период в 128. Выбрав x_0=1, получаем последовательность: 1, 82, 67, 84, 5, 86, 71, 88, 9, 90. Здесь можно заметить две странные вещи. Во-первых, члены с нечетными номерами (индексами) монотонно возрастают на постоянную, равную 2, до тех пор, пока остаток по модулю 128 не обратится в нуль, а, во-вторых, все члены последовательности, удаленные друг от друга на четыре шага, отличаются на 4, пока остаток не обращается в 0, 1, 2 или 3, когда весь процесс начинается сначала. Трудно найти последовательности, которые были бы менее случайными, чем эта!

Ну и, наконец, еще один отрезвляющий факт. Последовательность

x_{i+1}= (2^{18} + 3)x_i (по модулю 2^{35})

удовлетворяет большинству тестов на случайность, и на протяжении нескольких лет ею пользовались весьма удачно. Но затем заметили (и это легко доказывается), что любые три последовательных ее члена связаны простым рекуррентным соотношением, а именно

x_{i+2} = $6x_{i+1}$ – $9x_i$ (по модулю 2^{35}) .

Так что излишняя осторожность никогда не помешает!

В настоящее время численное моделирование широко используется как подспорье при принятии решений в промышленности, коммерции, транспорте, обороне и многих других областях. Первенство в этой области было захвачено около двадцати пяти лет назад тяжелой промышленностью, преимущественно угольной и сталелитейной, и некоторыми оборонными учреждениями. Эти важные вопросы рассматриваются в большинстве книг по операционным исследованиям. Одно из основных требований, предъявляемых к моделированию, заключается в том, чтобы модель можно было просчитать, т.е. чтобы она поддавалась расчетам; то же касается и других методов, излагаемых в данной главе. В самом деле, модель определяется «как представление динамической системы в таком виде, который годится для того, чтобы с ней мог обращаться компьютер». Создание таких моделей для довольно сложных систем со множеством взаимодействующих составляющих — безусловно, сложное и долгое дело. Для облегчения этого процесса был разработан и опубликован ряд специальных вычислительных языков программирования, называемых языками моделирования. Некоторые из них применяются весьма широко и практически оказались очень удачными.

Список литературы / References

1. Исследование операций в экономике / под ред. Н.Ш. Кремера. М.: Банки и биржи. ЮНИТИ, 1997.
2. *Ивановский В.Б., Чернов В.П. Теория* массового обслуживания. М.: ИНФРА-М, 2000.
3. *Рыжиков Ю.И*. Теория очередей и управление запасами. СПб, 2001.
4. Автоматизированные информационные технологии в экономике. / Под общ. ред. И.Т. Трубилина. М.: Финансы и статистика, 2000.
5. Информатика. Базовый курс. Под ред. С.В. Симоновича. СПб., 2000.
6.