NUMERICAL MODELING OF THE PROCESS TEMPERATURE DISTRIBUTION AND ITS SOLUTION IN THE MATHCAD SYSTEM

Allamuratov Sh.Z.[1], Nurimov P.B.[2], Kuvandikova D.K.[3], Ziuatdinov I.Sh.[4]
(Republic of Uzbekistan) Email: Allamuratov341@scientifictext.ru

[1]Allamuratov Sharapatdin Ziuatdinovich - Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Lecturer, DEPARTMENT OF INFORMATION EDUCATIONAL TECHNOLOGIES;
[2]Nurimov Parakhat Baymuratovich - Teacher, DEPARTMENT OF INFORMATION TECHNOLOGIES;
[3]Kuvandikova Damegul Kazakbaevna - Teacher, DEPARTMENT OF NATURAL AND GENERAL PROFESSIONAL SUBJECTS;
[4]Ziuatdinov Islambek Sharapatdinovich - Bachelor Student, NUKUS BRANCH
TASHKENT UNIVERSITY OF INFORMATION TECHNOLOGY NAMED AFTER MUHAMMAD AL-KHORAZMI, NUKUS, REPUBLIC OF UZBEKISTAN

Abstract: *in this paper we consider the problem of temperature propagation along a metal rod of length L. Where the boundary conditions are given in the following form: at the point x = 0 we have the temperature, and at the point x = L we have the temperature. And the initial time t = 0, the propagation of temperature along the length of the rod is given in the form. This mathematical model (1) is replaced by difference equations in the form (3). The boundary-value problem is solved by the sweep method, using explicit schemes. The program is compiled on MathCad where the stability conditions for explicit schemes are performed using the formula* $\lambda = \dfrac{k}{h^2} < 0{,}5$.

Keywords: *difference equation, sweep method, explicit scheme, stability.*

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ И ЕГО РЕШЕНИЕ В СИСТЕМЕ MATHCAD

Алламуратов Ш.З.[1], Нуримов П.Б.[2], Кувандикова Д.К.[3], Зиуатдинов И.Ш.[4]
(Республика Узбекистан)

[1]Алламуратов Шарапатдин Зиуатдинович - кандидат физико-математических наук, старший преподаватель, кафедра информационных образовательных технологий;
[2]Нуримов Парахат Баймуратович – преподаватель, кафедра информационных технологий;
[3]Кувандикова Дамегул Казакбаевна - преподаватель, кафедра естественных и общих профессиональных предметов;
[4]Зиуатдинов Исламбек Шарапатдинович - студент бакалавриата, Нукусский филиал
Ташкентский университет информационных технологий им. Мухаммада аль-Хоразми, г. Нукус, Республика Узбекистан

Аннотация: *в данной работе рассматривается задача распространения температуры по металлическому стержню длиной L, где граничные условия заданы в следующем виде: в точке x=0 имеем* $u(0,t) = f_0(t)$ *температуру, а в точке x=L имеем* $u(L,t) = f_1(t)$ *температуру. А начальное время t=0, распространения температуры по длине стержня задано в виде* $u(x,0) = g(x)$ *. Данная математическая модель (1) заменена разностными уравнениями в виде (3). Краевая задача решена методом прогонки, с использованием явных схем. Программа составлена на MathCade, где условия устойчивости для явных схем выполняются по формуле* $\lambda = \dfrac{k}{h^2} < 0{,}5$.

Ключевые слова: *разностное уравнение, метод прогонки, явная схема, устойчивость.*

В данной работе рассматривается задача распространения температуры по металлическому стержню длиной $0 \le x \le L$. Пусть в точке x=0 имеем $u(0,t) = f_0(t)$ температуру, а в точке x=L имеем $u(L,t) = f_1(t)$ температуру. Пусть в начальное время t=0, распространения температуры по длине стержня зададим $u(x,0)=g(x)$. Тогда функция распространения температуры по всему времени и по длине стержню определяется функцией $u(x,t)$ и задаётся следующим уравнением [1].

$$u_{xx}=au_t$$

$$0<x<L,\quad t>0$$

где $a=\dfrac{c\rho}{k}$, c- температурная ёмкость материала стержня, ρ - плотность материала, k- температура проводимость. Сделаем замену переменных по времени чтобы $a=1$. Тогда математическая модель распространения температуры задаётся следующим уравнением в начальных и граничных условиях [2].

$$\begin{aligned} &u_{xx}=u_t\\ &u(x,0)=g(x),\\ &u(0,t)=f_1(t),\\ &u(L,t)=f_2(t), \end{aligned}\qquad (1)$$

где $0\le x\le L,\quad 0\le t\le T$.

Это называется уравнением диффузии илиуравнением теплопроводности. Зададим сеточную уравнению следующей разностной схемой.

$$u_x=\frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{h},\quad u_{xx}=\frac{u_{i-1,j}-2u_{i,j}+u_{i+1,j}}{h^2},\quad u_t=\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{k}.\qquad (2)$$

Имеем следующее разностнее уравнение [2].

$$\frac{u_{i-1,j}-2u_{i,j}+u_{i+1,j}}{h^2}=\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{k}.$$

Начальные и граничные условия

$$\begin{aligned} &u_{i,j}=\lambda u_{i+1,j}+\lambda u_{i-1,j}+(1-2\lambda)u_{i,j},\\ &u_{i,0}=g(ih),\quad u_{0,j}=f_1(jk),\quad u_{n,j}=f_2(jk). \end{aligned}\qquad (3)$$

Условия устойчивости для явных схем $\lambda=\dfrac{k}{h^2}<0{,}5$.

Приведем пример для уравнения теплопроводности следующим образом.

$$\begin{aligned} &u_{xx}=u_t\\ &u(x,0)=g(x),\\ &u(0,t)=g(x_0),\\ &u(L,t)=g(x_n). \end{aligned}$$

где $0\le x\le L,\quad 0\le t\le T$.

Если начальную температуру задать в виде функции, $g(x)=\left(\dfrac{1}{e^{5x}}\right)+\tan(x)$ то определим распространение температуры по всему стержню.

Разностное уравнение в начальном и граничных условиях имеет следующий вид.

$$u_{i,j} = \lambda u_{i+1,j} + \lambda u_{i-1,j} + (1-2\lambda)u_{i,j},$$
$$u_{i,0} = g(x_0 + ih),$$
$$u_{i,0} = g(x_0),$$
$$u_{n,j} = g(x_n).$$

Здесь выполняются условия устойчивости $\lambda = \dfrac{k}{h^2} = 0{,}417 < 0{,}5.$

Результаты вычислены в пакете MathCad. Из рисунков видно что $T_{i,0}$ - распространение температуры в начальный момент времени, $T_{i,\frac{m}{2}}$ - на середине, $T_{i,m}$ - распространение температуры в конце процесса.

Таблица 1. Результаты вычисления значений температуры по времени

T =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0.707	0.772	0.8	0.824	0.841	0.855	0.867	0.878	0.888	0.896	0.904
2	0.571	0.611	0.657	0.688	0.716	0.74	0.761	0.779	0.796	0.812	0.826
3	0.532	0.559	0.588	0.62	0.648	0.675	0.698	0.721	0.742	0.761	0.78
4	0.558	0.577	0.597	0.619	0.643	0.667	0.69	0.713	0.735	0.755	0.775
5	0.628	0.643	0.659	0.676	0.695	0.716	0.736	0.757	0.777	0.797	0.816
6	0.734	0.748	0.763	0.779	0.796	0.813	0.832	0.85	0.868	0.885	0.902
7	0.872	0.888	0.904	0.922	0.939	0.955	0.97	0.986	1	1.015	1.029
8	1.048	1.068	1.09	1.106	1.121	1.133	1.146	1.157	1.167	1.178	1.188
9	1.271	1.3	1.313	1.325	1.333	1.341	1.347	1.354	1.359	1.365	1.37
10	1.564	1.564	1.564	1.564	1.564	1.564	1.564	1.564	1.564	1.564	…

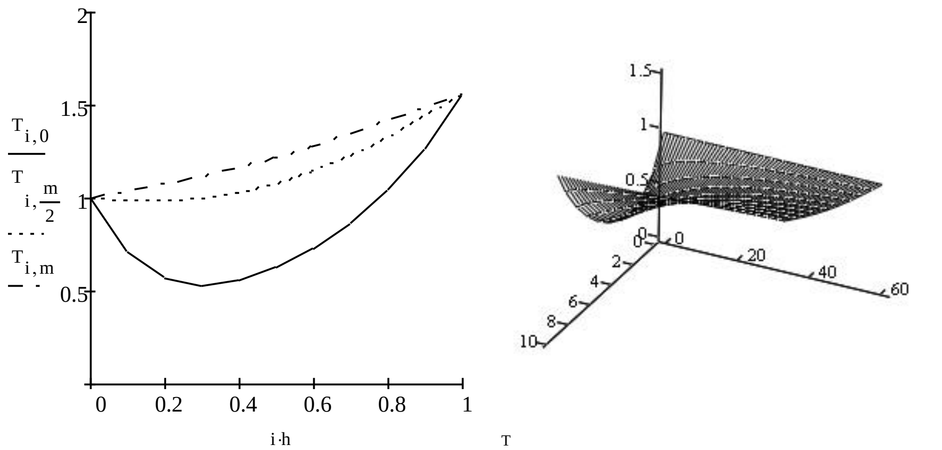

Рис. 1. Двумерный и трехмерный график распространения температуры при 0≤x≤1, 0≤t≤0,25

Список литературы / References

1. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. М.:Наука,1978. 512 с.
2. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решении сеточных уравнении. М.: Наука, 1978. 588 с.