GAUSS PROBLEM ABOUT THE NUMBER OF WHOLE DOTS IN THE CIRCLE

Uteulieva K.N.[1], Khairullina Z.A.[2] (Republic of Kazakhstan)
Email: Uteulieva363@scientifictext.ru

[1]*Uteulieva Kamka Nasipkalievna - Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor;*
[2]*Khairullina Zarina Armatovna - Student of Master's Programme,*
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND METHODS OF TEACHING MATHEMATICS, FACULTY OF PHYSICS, MATHEMATICS AND INFORMATION TECHNOLOGY,
DOSMUKHAMEDOV ATYRAU STATE UNIVERSITY,
ATYRAU, REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

Abstract: *this article discusses the first problems of the theory of integer points, namely the "Gauss problem on the number of integer points in a circle" and the "problem of Dirichlet divisors". Number theory deals with the study of the properties of integers. Analytical number theory is a part of number theory, in which, along with its own methods, the analytical apparatus of mathematics is substantially used. Leaving aside minor details, I tried to expound the main thing that led to the modern state of the theory. Therefore, often not the best results known so far are given, but all of them are fundamentally no different from the latter. The article is devoted to four problems of analytic number theory - the problem of integer points in flat domains, the problem of the distribution of primes in natural numbers and arithmetic progressions, the Goldbach problem and the Waring problem. We believe that the Cartesian coordinate system of the HOA is defined on the plane. The first problem finds the values of the first sum, and the second task is the main difficulty of the problems of the theory of integer points. We consider the Gauss problems on the number of integer points in a circle so that for* $|\Delta(R)|$ *get the most accurate upper estimate. The problem of Dirichlet divisors is formulated in a similar way. Consider the hyperbola and the number of integer points with positive coordinates below it. For a quantity, it is necessary to obtain the most accurate upper estimate. The formulated problems are special cases of a more general problem about the number of integer points in a region bounded by a curve.*
Keywords: *integer points, Gauss problem, Derichlet divisor, cartesian system.*

ПРОБЛЕМА ГАУССА О ЧИСЛЕ ЦЕЛЫХ ТОЧЕК В КРУГЕ

Утеулиева К.Н.[1], Хайруллина З.А.[2] (Республика Казахстан)

[1]*Утеулиева Камка Насипкалиевна - кандидат физико-математических наук, ассоциированный профессор;*
[2]*Хайруллина Зарина Арматовна - магистр,*
кафедра математики и методики преподования математики, факультет физики, математики и информационных технологий,
Атырауский государственный университет им. Х. Досмухамедова,
г. Атырау, Республика Казахстан

Аннотация: *в этой статье рассматриваются первые задачи теории целых точек, именно «проблема Гаусса о числе целых точек в круге» и «проблема делителей Дирихле». Теория чисел занимается изучением свойств целых чисел. Аналитическая теория чисел - часть теории чисел, в которой наряду с собственными методами существенно используется аналитический аппарат математики. Оставляя в стороне второстепенные детали, мы старались изложить то главное, что привело к современному состоянию теории. Поэтому часто даны не лучшие известные к настоящему времени результаты, однако все они принципиально не отличаются от последних. Статья посвящена четырем проблемам аналитической теории чисел – проблеме целых точек в плоских областях, проблеме распределения простых чисел в натуральном ряде и арифметических прогрессиях, проблеме Гольдбаха и проблеме Варинга. Считаем, что на плоскости задана декартова система координат ХОУ. Первая задача находит значения первой суммы и вторая задача составляем основную трудность проблем теории целых точек. Мы рассмотрим проблемы Гаусса о числе целых точек в круге, чтобы для величины* $|\Delta(R)|$ *получить возможно более точную оценку сверху. Аналогично формулируется проблема делителей Дирихле. Рассмотрим гиперболу и число целых точек с положительными координатами под ней. Для величины требуется получить возможно более точную оценку сверху. Сформулированные проблемы являются частными случаями более общей проблемы о числе целых точек в области, ограниченной кривой.*
Ключевые слова: *целые точки, проблема Гаусса, делитель Дерихле, декартова система.*

Постановка задачи, вспомогательные утверждения и простейшие результаты.

Определение. *Точка М с координатами (x,y) называется целой, если x и y – целые числа.*

Рассмотрим круг $x^2 + y^2 = R$ и обозначим через $K(R)$ число целых точек в этом круге. При больших R величина $K(R)$ близка к площади круга πR. Обозначим через $\Delta(R)$ разность между $K(R)$ и πR, $\Delta(R) = K(R) - \pi R$.

Проблема Гаусса о числе целых точек в круге состоит в том, чтобы для величины $|\Delta(R)|$ получить возможно более точную оценку сверху при $R \to +\infty$.

Аналогично формулируется проблема делителей Дирихле. Рассмотрим гиперболу $xy = R$ и число $L(R)$ целых точек с положительными координатами под ней. Пусть $\Delta_1(R) = L(R) - R(\ln R + 2\gamma - 1), R \to +\infty$, где γ- постоянная Эйлера. Для величины $|\Delta_1(R)|$ требуется получить возможно более точную оценку сверху.

Из определения $L(R)$ и функции $\tau(n)$- числа делителей - следует равенство

$L(R) = \sum_{n \le R} \tau(n)$, которое объясняет название проблемы.

Сформулированные проблемы являются частными случаями более общей проблемы о числе целых точек в области, ограниченной кривой $y = f(x)$, где $f(x)$ – непрерывная неотрицательная на отрезке $[a, b]$ функция, и прямыми $x = a, x = b$,

$y = 0$, причем считаются точки $M = (x, y)$ с условием $a < x \le b$, $0 < y \le f(x)$. Обозначим это число буквой *T*. Тогда

$$T = \sum_{a<x\le b}[f(x)] = \sum_{a<x\le b} f(x) - \sum_{a<x\le b}\{f(x)\}. \qquad (1)$$

Тем самым возникают две задачи: 1) нахождение значения первой суммы; 2) нахождение возможно более точных асимптотических формул для второй суммы. Решение первой задачи при достаточно общих предположениях относительно $f(x)$ дается теоремой 1. Вторая задача составляет основную трудность проблем теории целых точек.

Теорема 1 (формула Эйлера-Маклорена). *Пусть $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$ и функции $\rho(x), \sigma(x)$ определяются равенствами*

$$\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}, \sigma(x) = \int_0^x \rho(u)\,du.$$

Тогда

$$\sum_{a<x\le b} f(x) = \int_a^b f(x)dx + \rho(b)f(b) - \rho(a)f(a) + \sigma(a)f'(a) - \sigma(b)f'(b) + \int_a^b \sigma(x)f''(x)dx.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем предполагать, что на интервале (*a*,*b*) лежит по крайне мере одна целая точка. Разбивая промежуток интегрирования целыми точками на новые, получаем равенство

$$\int_a^b \sigma(x)f''(x)dx = \int_a^{[a]+1} \sigma(x)f''(x)dx + \sum_{n=[a]+1}^{[b]-1} \int_n^{n+1} \sigma(x)f''(x)dx + \int_{[b]}^b \sigma(x)f''(x)dx.$$

На каждом из получившихся интервалов интегрирования функции $\rho(x), \sigma(x)$- непрерывно дифференцируемые, причем $\sigma'(x) = \rho(x)$. Поэтому, интегрируя дважды по частям, найдем

$$\int_a^{[a]+1} \sigma(x)f''(x)dx = -\sigma(a)f'(a) + \frac{1}{2}f([a]+1) + \rho(a)f(a) - \int_a^{[a]+1} f(x)dx;$$

$$\int_n^{n+1} \sigma(x)f''(x)dx = \frac{1}{2}f(n+1) + \frac{1}{2}f(n) - \int_n^{n+1} f(x)dx;$$

$$\int_{[b]}^b \sigma(x)f''(x)dx = \sigma(b)f'(b) - \rho(b)f(b) + \frac{1}{2}f([b]) - \int_{[b]}^b f(x)dx.$$

Поставляя эти формулы в предыдущее соотношение, получим утверждение теоремы.

Замечание. Часто применяется более простая формула суммирования:

$$\sum_{a<x\le b} f(x) = \int_a^b f(x)dx + \rho(b)f(b) - \rho(a)f(a) - \int_a^b \rho(x)f'(x)dx. \qquad (2)$$

Здесь уже достаточна, чтобы $f(x)$ была непрерывно дифференцируема на $[a, b]$.

Перейдем к проблемам Гаусса и Дирихле.

Теорема 2 (Гаусс). Для $K(R)$ справедлива следующая асимптотическая формула:

$$K(R) = \pi R + \Delta(R), \Delta(R) = O(\sqrt{R}).$$

Доказательство. Рассмотрим криволинейную трапецию

$0 < x \le \sqrt{\frac{R}{2}}, \qquad 0 < y \le \sqrt{R - x^2}$

Весь круг $K: x^2 + y^2 \le R$, состоит из восьми областей, равных этой трапеции. Учитывая пересечения этих областей по квадратам со стороной $\sqrt{\frac{R}{2}}$ и применяя формулу 1, находим

$$K(R)=1+4\left[\sqrt{R}\right]+8\sum_{0<x\le\sqrt{\frac{R}{2}}}\left[\sqrt{R-x^2}\right]-4\left[\sqrt{R/2}\right]^2=8\sum_{0<x\le\sqrt{\frac{R}{2}}}\left[\sqrt{R-x^2}\right]-2R+4\sqrt{2R}\left\{\sqrt{R/2}\right\}$$
$$+4\sqrt{R}-8\sum_{0<x\le\sqrt{\frac{R}{2}}}\left[\sqrt{R-x^2}\right]+O(1).$$

Вычислим предпоследнюю сумму, пользуясь теоремой 1: $\sum_{0<x\le\sqrt{\frac{R}{2}}}\left[\sqrt{R-x^2}\right]=\int_0^{\sqrt{\frac{R}{2}}}\sqrt{R-u^2}du+\left(\frac{1}{2}-\left\{\sqrt{\frac{R}{2}}\right\}\right)\sqrt{\frac{R}{2}}-\frac{\sqrt{R}}{2}+\sigma\left(\sqrt{\frac{R}{2}}\right)\frac{\sqrt{\frac{R}{2}}}{\sqrt{\frac{R}{2}}}+\int_0^{\sqrt{\frac{R}{2}}}\sigma(u)\frac{d^2}{du^2}\left(\sqrt{R-u^2}\right)du.$

Так как $|\sigma(u)|\le 1/8$ и первый интеграл равен площади рассматриваемой криволинейной трапеции $\frac{\pi R}{8}+R/4$, то

$$\sum_{0<x\le\sqrt{\frac{R}{2}}}\sqrt{R-x^2}=\frac{\pi R}{8}+\frac{R}{4}+\frac{\sqrt{R}}{2\sqrt{R}}-\sqrt{\frac{R}{2}}\left\{\sqrt{\frac{R}{2}}\right\}-\frac{\sqrt{R}}{2}+O(1).$$

Отсюда находим
$K(R)=\pi R+\Delta(R)$,
где

$$\Delta(R)=2\sqrt{2R}-8\sum_{0<x\le\sqrt{\frac{R}{2}}}\left\{\sqrt{R-x^2}\right\}+O(1)=O\left(\sqrt{R}\right), \qquad (3),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 3 (Дирихле). *Для* $L(R)$ *справедлива следующая асимптотическая формула:*
$L(R)=R(\ln R+2\gamma-1)+\Delta_1(R),\qquad \Delta_1(R)=O\left(\sqrt{R}\right)$, *где* γ *- постоянная Эйлера.*

Доказательство. Рассмотрим криволинейную трапецию $1\le x\le\sqrt{R}, 0<y\le\frac{R}{x}$.
Область L состоит из двух областей, равных этой трапеции.
Применяя формулу 1, найдем $L(R)=2\sum_{1\le x\le\sqrt{R}}\left[\frac{R}{x}\right]-([R])^2=2R\sum_{1\le x\le\sqrt{R}}\frac{1}{x}-2$

$$\sum_{1\le x\le\sqrt{R}}\left\{\frac{R}{x}\right\}-R+2\sqrt{R}\left\{\sqrt{R}\right\}+O(1).$$

Из теоремы 1 следует $\sum_{1\le x\le\sqrt{R}}\frac{1}{x}=\int_1^{\sqrt{R}}\frac{du}{u}+\left(\frac{1}{2}-\left\{\sqrt{R}\right\}\right)\frac{1}{\sqrt{R}}-\frac{1}{2}+\sigma\left(\sqrt{R}\right)\frac{1}{R}-\sigma(1)+2\int_1^{\sqrt{R}}\sigma(u)\frac{du}{u^3}=\ln\sqrt{R}+\left(\frac{1}{2}-\left\{\sqrt{R}\right\}\right)\frac{1}{\sqrt{R}}-\frac{1}{2}+2\int_1^{\infty}\sigma(u)\frac{du}{u^3}+O\left(\frac{1}{R}\right).$

По определению постоянной Эйлера,

$$\gamma=\lim_{Y\to+\infty}\left(\sum_{1\le n\le Y}\frac{1}{n}-\ln Y\right);$$

применяя к сумме в скобках теорему 1, найдем $\gamma=-\frac{1}{2}+2\int_1^{\infty}\sigma(u)\frac{du}{u^3}$.
Тем самым для величины $L(R)$ получаем формулу

$$L(R)=R\ln R+2\sqrt{R}\left(\frac{1}{2}-\left\{\sqrt{R}\right\}\right)+(2\gamma-1)R$$
$$-2\sum_{1\le x\le\sqrt{R}}\left\{\frac{R}{x}\right\}+2\sqrt{R}\left\{\sqrt{R}\right\}+O(1)=R(\ln R+2\gamma-1)+\Delta_1(R),$$

где:

$$\Delta_1(R)=\sqrt{R}-2\sum_{1\le x\le\sqrt{R}}\left\{\frac{R}{x}\right\}+O(1)=O\left(\sqrt{R}\right), \qquad (4)$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Если дробные доли функций $f(x)=\sqrt{R-x^2}$ при $0<x\le\sqrt{R/2}$ и $f(x)=R/x$ при $0<x\le\sqrt{R}$ распределены «равномерно», т.е. количество дробных долей $f(x)$, попадающих на любой интеграл (a,b), то

$$\sum_{0<x\le\sqrt{\frac{R}{2}}}\left\{\sqrt{R-x^2}\right\}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{R}{2}}+o\left(\sqrt{R}\right),$$

$$\sum_{0<x\le\sqrt{R}} \left\{\frac{R}{x}\right\} = \frac{1}{2}\sqrt{R} + o\left(\sqrt{R}\right),$$

(для этого достаточно $[0,1]$ разбить на «малые» равные интервалы), и в теоремах 2 и 3 получается уточнение

$$\Delta(R) = o\left(\sqrt{R}\right), \qquad \Delta_1(R) = o\left(\sqrt{R}\right)$$

Список литературы / References

1. *Карацуба А.А.* Основы аналитической теории чисел. 2-е изд. М.: Наука, 1983.
2. *Хуа Ло-кен.* Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел. М.: Мир, 1984.
3. *Дэвенпорт Г.* Мультипликативная теория чисел. М.: Наука, 1981.
4. *Ингам А.Е.* Распределение простых чисел. М.: ОНТИ, 1980.