DETERMINATION OF THE CHARACTER OF BODY MOTION IN A VISCOUS MEDIUM UNDER THE ACTION OF GRAVITY

Dadashov I.O.[1] (Russian Federation), Korsunov K.A.[2] (Ukraine)
Email: Dadashov368@scientifictext.ru

[1]Dadashov Illyas Oktaevich – Student,
DEPARTMENT OF NUCLEAR PHYSICS AND TECHNOLOGY,
[2]Korsunov Konstantin Anatolevich – Doctor of Technical Sciences, Full Professor,
DEPARTMENT OF PHYSICS, FACULTY OF NATURAL SCIENCES,
OBNINSK INSTITUTE FOR NUCLEAR POWER ENGINEERING, OBNINSK
LUHANSK STATE UNIVERSITY NAMED AFTER V. DAHL, LUGANSK, UKRAINE

Abstract: *in many scientific and technical applications one has to deal with the motion of various bodies in a viscous medium. The movement of an airplane, rocket, ship or submarine takes place in various media differing in density, viscosity and other parameters, but the same laws are at the heart of their movement. Therefore, the study of the features of the motion of bodies in a viscous medium remains an important scientific and practical task. This article assumes that the problem of the motion of a body in a viscous medium under the action of gravity can be considered from the standpoint of classical mechanics. Analytical dependences are presented for calculating the speed of a body in a viscous medium under the action of gravity, taking into account the Archimedean force. The values of the resistance coefficients of the medium (glycerin) for two steel balls of different diameters, determined by the method of a computational experiment using the Stokes device, are obtained. The results obtained can be used to study and simulate the motion of bodies in viscous media under the action of gravity.*
Keywords: *viscous medium, drag coefficient, body motion in a viscous mediumб, Stokes formula, Reynolds number, Stokes device.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРА ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА В ВЯЗКОЙ СРЕДЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Дадашов И.О.[1] (Российская Федерация), Корсунов К.А.[2] (Украина)

[1]Дадашов Ильяс Октаевич – студент,
отделение ядерной физики и технологий,
Обнинский институт атомной энергетики — филиал
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», г. Обнинск;
[2]Корсунов Константин Анатольевич – доктор технических наук, профессор,
кафедра физики, факультет естественных наук,
Луганский государственный университет им. В. Даля, г. Луганск, Украина

Аннотация: *во многих научных и технических приложениях приходится сталкиваться с движением различных тел в вязкой среде. Движение самолета, ракеты, корабля или подводной лодки происходят в различных средах, отличающихся плотностью, вязкостью и другими параметрами, но в основе их движения лежат одни и те же законы. Поэтому исследование особенностей движения тел в вязкой среде по-прежнему остается важной научной и практической задачей. В данной статье предполагается, что задача о движении тела в вязкой среде под действием силы тяжести может быть рассмотрена с позиций классической механики. Представлены аналитические зависимости для расчета скорости движения тела в вязкой среде под действием силы тяжести с учетом архимедовой силы. Получены значения коэффициентов сопротивления среды (глицерина) для двух стальных шаров различного диаметра, определённых методом вычислительного эксперимента с использованием прибора Стокса. Полученные результаты могут быть использованы при изучении и моделировании движения тел в вязких средах под действием силы тяжести.*
Ключевые слова: *вязкая среда, коэффициент сопротивление, движение тела в вязкой среде, формула Стокса, число Рейнольдса, прибор Стокса.*

1. Динамика движения тела в вязкой среде

В идеальной жидкости (без учета вязкости) жидкость, обтекая тело, движется слоями. Если тело симметрично и его ось симметрии совпадает с направлением скорости, то линии тока жидкости изгибаются также почти симметрично. Так как линии тока симметричны, то сечения трубок тока, а, следовательно, скорости и давления, окажутся в точках ***A*** и ***B*** (Рис. 1) примерно одинаковыми и сила лобового сопротивления стремится к нулю [1, 2].

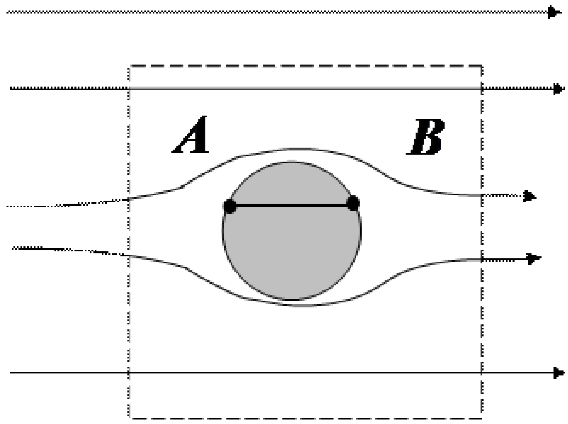

Рис. 1. Движение тела в идеальной жидкости

Иначе обстоит дело при движении тела в вязкой среде. Вследствие вязкости среды в области, прилегающей к телу, образуется пограничный слой, в котором скорость убывает от значения, соответствующего скорости невозмущенного потока до нуля, соответствующего прилипанию вязкой скорости к поверхности тела. Внутри пограничного слоя скорость меняется очень быстро и поэтому в нем вязкость играет определяющую роль. В результате тормозящего действия этого слоя возникает вращение частиц жидкости, и движение жидкости в пограничном слое становится вихревым. Если тело не имеет обтекаемой формы, то пограничный слой жидкости отрывается от поверхности тела. За телом возникает течение жидкости (газа), направленное противоположно набегающему потоку. Оторвавшийся пограничный слой, следуя за этим течением, образует вихри, вращающиеся в противоположные стороны. Жидкость, вращающаяся в вихре, движется быстрее жидкости в стационарном потоке. Поэтому с задней стороны обтекаемого тела, где образовались вихри, давление становится меньше, чем с передней. Разность давлений впереди и позади движущегося тела и создает сопротивление движению тела.

Сила сопротивления зависит от формы тела. Придание телу специально рассчитанной обтекаемой формы существенно уменьшает силу сопротивления, так как в этом случае жидкость всюду прилегает к его поверхности и позади него не завихрена.

Если скорость движения тела невелика, то сила сопротивления прямо пропорциональна модулю скорости:

$$F_c = kv, \qquad (1)$$

где k — коэффициент пропорциональности, который зависит от рода вязкой среды, формы и размеров тела (коэффициент сопротивления).

Если скорость движения тела возрастает, то возрастает и сила сопротивления:

$$F_c = kv^n, \qquad (2)$$

где $n = 2,3\ldots$.

При рассмотрении различных задач аэро- и газодинамики приходится сталкиваться с большими математическими трудностями, в связи с чем при исследовании различных вопросов в данном разделе физики большое значение имеют методы теории подобия и размерности. Так, английский физик и инженер Осборн Рейнольдс (1842-1912) составил безразмерную комбинацию, величина которой определяет характер течения жидкости (или тела в жидкости). Впоследствии эта комбинация была названа числом Рейнольдса (Re):

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v l}{\eta}, \qquad (3)$$

где ρ - плотность жидкости; η - вязкость; v - скорость; l - характерный линейный размер [1,2].

Рассмотрим равномерное движение твердого шара радиуса r в жидкости, вязкость которой η. Задача заключается в определении силы сопротивления F_c. Отметим, что вместо того чтобы говорить о движении тела (шара) в жидкости, можно говорить об эквивалентной задаче обтекания неподвижного тела потоком жидкости (такая постановка задачи отвечает наблюдениям над обтеканием тел потоком газа или плазмы в аэродинамических трубах). Размерность силы $[F_c] = \frac{кг \cdot м}{с^2}$. Величиной с такой размерностью, является, например, следующая $\rho v^2 r^2$. Всякая другая величина той же размерности может быть представлена в виде произведения $\rho v^2 r^2$ на некоторую функцию безразмерного числа Рейнольдса. Поэтому силу сопротивления можно представить в виде

$$F_c = \rho v^2 r^2 f(\mathrm{Re}). \qquad (4)$$

Таким образом, формула (4) определяет искомую силу сопротивления через неизвестную функцию числа Рейнольдса $f(\mathrm{Re})$, которую нельзя найти определить из соображений размерности. Эту функцию можно найти, например, экспериментально [2].

При достаточно малых скоростях (при $\mathrm{Re} < 0{,}2$) сила сопротивления пропорциональна первой степени скорости тела [3]. Чтобы из выражения (1.4) получить такую зависимость, необходимо считать, что функция $f(\mathrm{Re})$ имеет вид

$$f(\mathrm{Re}) = \frac{C}{\mathrm{Re}}, \qquad (5)$$

где C - некоторая константа.

Тогда из (3) - (5) получаем

$$F_c = C\eta r v, \qquad (6)$$

т.е. коэффициент сопротивления k в данном случае равен

$$k = C\eta r. \qquad (7)$$

Для движения шара в жидкости опытным путем английским физиком Дж. Стоксом (1819-1903) было установлено, что $C = 6\pi$. Таким образом, при движении шара в жидкости сила сопротивления определяется формулой Стокса

$$F_c = 6\pi\eta r v. \qquad (8)$$

2. Теоретическое исследование движения тела в вязкой среде

Рассмотрим движение шарика радиуса r и массой m в вязкой среде под действием силы тяжести (рис. 2). На шарик действуют сила тяжести $\vec{F}_T$, сила сопротивления $\vec{F}_c$ и архимедова сила $\vec{F}_A$.

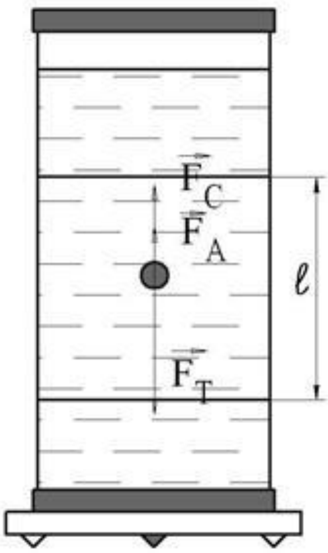

Рис. 2 Движение шарика в вязкой среде

Уравнение движения шарика имеет вид

$$m\vec{a} = \vec{F}_T + \vec{F}_c + \vec{F}_A. \qquad (9)$$

Учитывая направление действия сил, уравнение (9) в скалярном виде принимает вид

$$ma = F_T - F_c - F_A. \qquad (10)$$

Так как ускорение $a = \dfrac{dv}{dt}$, сила тяжести $F_T = mg$ и архимедова сила $F_A = \rho gV$, то уравнение (10) перепишем в виде

$$m\frac{dv}{dt} = mg - F_c - \rho gV\,, \qquad (11)$$

где ρ - плотность жидкости (среды); V - объем шарика.

Поскольку объем шарика $V = \dfrac{m}{\rho_m}$, где ρ_m - плотность материала, из которого изготовлен шарик, то уравнение (11) преобразуем к виду

$$m\frac{dv}{dt} = mg\left(1 - \frac{\rho}{\rho_m}\right) - F_c\,. \qquad (12)$$

Будем считать, что скорость движения шарика достаточно мала, поэтому величина силы сопротивления будет пропорциональна скорости, т.е. $F_c = kv$, тогда формула (12) приобретает вид

$$m\frac{dv}{dt} = mg\left(1 - \frac{\rho}{\rho_m}\right) - kv\,. \qquad (13)$$

Разделяя переменные, находим

$$-\frac{dv}{\dfrac{mg}{k}\left(1 - \dfrac{\rho}{\rho_m}\right) - v} = -\frac{k}{m}dt\,,$$

или

$$\frac{d\left(\dfrac{mg}{k}\left[1 - \dfrac{\rho}{\rho_m}\right] - v\right)}{\dfrac{mg}{k}\left(1 - \dfrac{\rho}{\rho_m}\right) - v} = -\frac{k}{m}dt\,. \qquad (14)$$

Интегрируя выражение (14), получим

$$\ln\left(\frac{mg}{k}\left[1 - \frac{\rho}{\rho_m}\right] - v\right) = -\frac{k}{m}t + c\,. \qquad (15)$$

Для нахождения константы интегрирования c воспользуемся начальными условиями. Считаем, что в начальный момент времени ($t = 0$) начальная скорость шарика равна нулю ($v_0 = 0$). Тогда из (15) следует, что $c = \ln\left(\dfrac{mg}{k}\left[1 - \dfrac{\rho}{\rho_m}\right]\right)$. Подставляя это значение константы C в уравнение (15), получим выражение для скорости $v = v(t)$:

$$v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_m}\right)\left[1 - \exp\left(-\frac{k}{m}t\right)\right]\,. \qquad (16)$$

Из полученного уравнения (16) следует, что при $t \to \infty$ скорость шарика стремится к своему максимальному значению $v_{\max}$ и движение тела становится равномерным:

$$v_{\max} = \frac{mg}{k}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_m}\right). \qquad (17)$$

Теоретически движение шарика всегда ускоренное, но практически начиная с некоторого момента времени изменением величины скорости можно пренебречь и считать, что шарик движется равномерно со скоростью $v_{\max}$.

Используя выражение (17) для скорости равномерного движения шарика $v_{\max}$ в вязкой среде под действием силы тяжести и измерив экспериментально значение этой скорости, можно определить коэффициент сопротивления k :

$$k = \frac{mg}{v_{\max}}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_m}\right), \qquad (18)$$

где $m = \frac{4}{3}\pi\rho_m r^3$ - масса шарика.

Зная коэффициент сопротивления k , из формулы (7) определим значение константы C для шарика

$$C = \frac{k}{\eta r}. \qquad (19)$$

Погрешность вычисления массы шарика определяем по формуле

$$\frac{\Delta m}{m} = \sqrt{\left(\frac{\Delta\pi}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{3\Delta r}{r}\right)^2} .$$

Относительную погрешность вычисления коэффициента сопротивления k находим следующим образом

$$\varepsilon_k = \frac{\Delta k}{k} = \sqrt{\left(\frac{\Delta v_{\max}}{v_{\max}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta g}{g}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2} ,$$

откуда

$$\Delta k = \varepsilon_k \cdot k .$$

Относительную погрешность вычисления константы C находим по формуле

$$\varepsilon_C = \frac{\Delta C}{C} = \sqrt{\left(\frac{\Delta k}{k}\right)^2 + \left(\frac{\Delta r}{r}\right)^2} ,$$

Откуда

$$\Delta C = \varepsilon_C \cdot C .$$

3. Экспериментальное исследование движения тела в вязкой среде

Для проведения экспериментального исследования движения тела в вязкой среде используем прибор Стокса (рис. 3), который представляет собой стеклянный цилиндр с налитой в него жидкостью. В данном случае в приборе используется глицерин. Внутри сосуда (стеклянного цилиндра) находятся стальные шарики различного диаметра. Цилиндр с обоих концов закрыт пробками, имеющими изнутри форму воронок. При переворачивании цилиндра вокруг горизонтальной оси воронки обеспечивают движение шариков вдоль осевой линии сосуда.

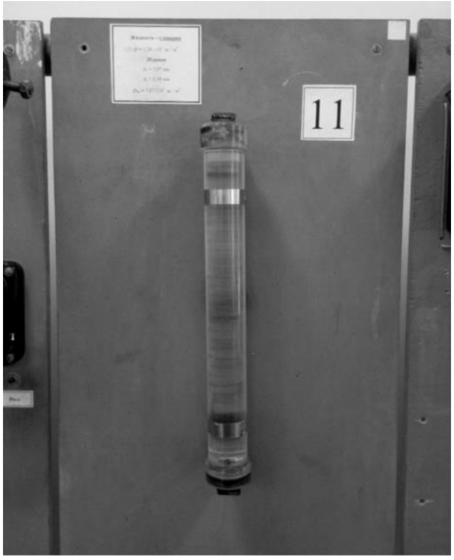

Рис. 3. Экспериментальная установка

Исследование проводилось с двумя стальными шариками радиусом 1,985 мм и 0,79 мм. Из формулы (17) следует, что скорость равномерного движения достигается спустя некоторое время, поэтому измерения проводились не с момента начала движения шарика, а спустя некоторое время, когда движение шарика становится равномерным. Скорость равномерного движения шарика v находим по формуле

$$v = \frac{\ell}{t}, \qquad (20)$$

где ℓ - расстояние, проходимое шариком; t - время движения.

Результаты экспериментальных исследований приведены в табл. 1 и 2.

Таблица 1. Результаты измерения для шарика радиусом $r = 1{,}985$ мм

№ п/п	ℓ, м	$\Delta\ell$, м	t, с	t_c, с	Δt, с	v, м/с	Δv, м/с	ε_v
1	0,22	0,0005	2,06	2,083	0,048	0,106	0,016	0,152
2			2,13					
3			2,16					
4			2,02					
5			2,05					
6			2,08					

Таблица 2. Результаты измерения для шарика радиусом $r = 0{,}79$ мм

№ п/п	ℓ, м	$\Delta\ell$, м	t, с	t_c, с	Δt, с	v, м/с	Δv, м/с	ε_v
1	0,22	0,0005	9,9	9,783	0,227	0,023	0,0035	0,152
2			10,17					
3			9,6					
4			9,45					
5			9,8					
6			9,78					

Погрешность измерений времени движения находим по формуле

$$\Delta t = \sqrt{\Delta t_1 + \Delta t_2},$$

где Δt_1 – приборная погрешность; Δt_2 – случайная погрешность, которую находим следующим образом

$$\Delta t_2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(t_c - t_i)^2}{N}} \, .$$

Относительную погрешность определения скорости ε_v определяем по формуле

$$\varepsilon_v = \sqrt{\left(\frac{\Delta \ell}{\ell}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{t_c}\right)^2} \, ,$$

а погрешность измерения скорости Δv определим как

$$\Delta v = v \cdot \varepsilon_v \, .$$

Обработка результатов измерений и расчет погрешностей осуществлялся с помощью пакета Mathcad.

Коэффициент сопротивления k рассчитываем по формуле (19) с учетом экспериментальных данных, приведенных в табл. 1 и 2. Значение константы C определяем по формуле (20). Значения плотности материала шарика (сталь) и глицерина берем из справочной литературы: ρ_m =7800 кг/м^3, ρ =1261 кг/м^3.

Результаты расчета приведены в табл. 3

Таблица 3. Результаты расчета коэффициента сопротивления

№ п/п	k **, (Нс)/м**	Δk **, 10^{-3} (Нс)/м**	C	ΔC	**Стеор**
1	0,02	3,021	4,246	0,641	6π
2	0,0058	0,889	3,099	0,476	

С учетом найденных значений коэффициентов сопротивлений k по формуле (18) с помощью пакета Mathcad были построены зависимости $v = v(t)$ для шариков радиусом 1,985 мм и 0,79 мм (рис. 3.2 и рис. 3.3). Как видно, для достижения максимальной скорости шариками в глицерине требуется достаточно малое время. Так, для шарика радиусом 1,985 мм это время достигает значения t_1 =0,07 с, а для шарика радиусом 0,79 мм – t_2 =0,015 с.

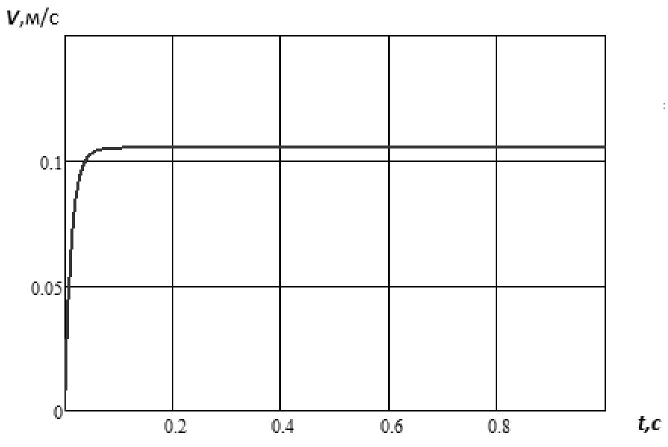

Рис. 4. Зависимость скорости шарика радиусом 1,985 мм от времени

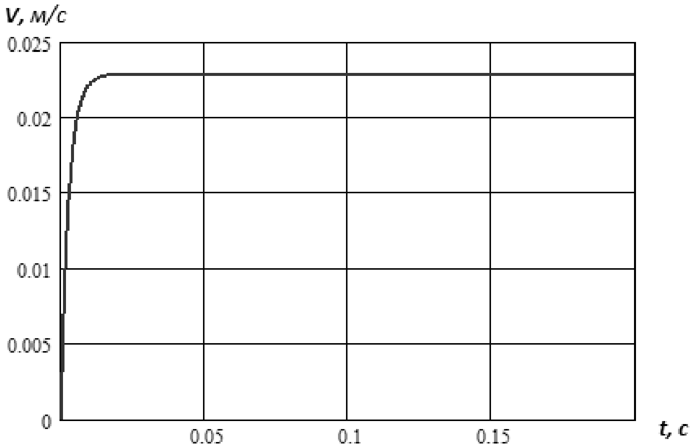

Рис. 5. Зависимость скорости шарика радиусом 0,79 *мм от времени*

Поскольку значения времени достижения скорости равномерного движения известны, то с помощью пакета Mathcad можно найти путь, проходимый шариком до достижения этой скорости по формуле

$$x = \int_0^t v(t)dt \,. \qquad (21)$$

Для шарика радиусом 1,985 мм этот путь равен $x_1 = 6{,}012 \cdot 10^{-3}$ м (т.е. порядка 6 мм), а для шарика радиусом 0,79 мм – $x_2 = 2{,}79 \cdot 10^{-4}$ м (т.е. порядка 0,3 мм).

Заключение:

- Величину силы сопротивления можно также выразить через некоторую функцию числа Рейнольдса, т.е. $F_c = \rho v^2 r^2 f(\mathrm{Re})$, причем явный вид этой функции необходимо устанавливать дополнительно, например, экспериментально. Для случая малых скоростей функция $f(\mathrm{Re})$ может быть представлена как $f(\mathrm{Re}) = \frac{C}{\mathrm{Re}}$, а сила сопротивления - $F_c = C\eta r v$ (т.е. $k = C\eta r$). Для тел шаровидной формы сила сопротивления определяется формулой Стокса $F_c = 6\pi\eta r v$.
- При теоретическом исследовании движения шарика в вязкой среде под действием силы тяжести получена зависимость $v = v(t)$, описывающая изменение скорости движущегося тела с течением времени.
- Анализ полученной зависимости $v = v(t)$ показал, что спустя небольшой промежуток времени движение тела в вязкой среде становится равномерным.
- На основе полученных формул разработана методика для экспериментального определения коэффициента сопротивления k и константы C.
- Экспериментально с помощью прибора Стокса были определены коэффициенты сопротивления при движении шарика в глицерине под действием силы тяжести. Для шарика радиусом 1,985 мм коэффициент сопротивления равен $k = 0{,}02 \pm 0{,}003021$ (Нс)/м, а для шарика радиусом 0,79 мм коэффициент сопротивления равен $k = 0{,}0058 \pm 0{,}000889$ (Нс)/м.
- Величина константы C была определена по результатам экспериментов и составила для шарика радиусом 1,985 мм $C = 4{,}246 \pm 0{,}641$, а для шарика радиусом 0,79 мм $C = 3{,}099 \pm 0{,}476$, что по порядку величины соответствует теоретическому значению $C_{теор} = 6\pi$.
- С помощью пакета Mathcad были построены зависимости $v = v(t)$ для исследуемых шариков и определены время и путь, за которые скорость шариков становится максимальной, а движение шарика – равномерным.

Список литературы / References

1. *Трофимова Т.И.* Курс физики: Учебное пособие. М.: Высш. шк., 1990. С. 478.

2. *Ландау Л.Д., Ахиезер А.И., Лифшиц Е.М.* Курс общей физики. Механика и молекулярная физика. М.: Наука, 1969. С. 399.
3. *Аверин С.И., Минаев А.Н., Швыдкий В.С., Ярошенко Ю.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Металлургия, 1987. С. 304.
4. *Савельев И.В.* Курс общей физики. Т. 1, 2. М.: Наука, 1982.
5. *Беликов Б.С.* Решение задач по физике. Общие методы. М.: Высш. шк., 1986. С. 256.